

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI**

**Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Fisica**

**ONDE GRAVITAZIONALI PROVENIENTI  
DAI NUCLEI GALATTICI ATTIVI:  
RASSEGNA DELLE BASI TEORICHE E  
STRATEGIE DI RIVELAZIONE**

**Tesi di laurea di:**  
Barbara Leo

**Relatore**  
Luciano Burderi

**Co-Relatori**  
Salvatore Capozziello  
Christian Corda



*A tutte le persone  
che hanno creduto in me e  
che mi hanno insegnato  
“a non mollare mai!”.*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 I Nuclei galattici e le loro attività</b>	<b>2</b>
1.1 Il quadro generale delle attività nucleari . . . . .	2
1.2 Classificazione degli AGN . . . . .	4
1.2.1 I moti superluminali . . . . .	9
1.3 Lo spettro degli AGN . . . . .	11
1.3.1 La radiazione di sincrotrone . . . . .	15
1.4 Valutazione delle masse dei nuclei galattici attivi . . . . .	18
1.5 Esistenza di sistemi binari di Buchi neri supermassivi . . . . .	21
1.6 L'origine dello spettro degli AGN . . . . .	28
1.6.1 Temperatura e spettro della radiazione provenienti da un disco . . . . .	29
<b>2 La teoria della relatività generale e le onde gravitazionali</b>	<b>33</b>
2.1 La meccanica newtoniana e la sua invarianza rispetto alle trasformazioni di Galileo . . . . .	33
2.2 Le leggi dell'elettromagnetismo e la crisi della meccanica newtoniana. . . . .	35
2.3 La relatività ristretta . . . . .	36
2.4 La relatività generale . . . . .	37
2.5 Le equazioni di Einstein . . . . .	38
2.6 Strumenti matematici per studiare la relatività generale . . . . .	40
2.7 La teoria linearizzata . . . . .	41
2.8 La propagazione del campo gravitazionale . . . . .	43
2.9 Le onde gravitazionali . . . . .	48

2.10	Onde piane monocromatiche . . . . .	49
2.11	Stati di polarizzazione . . . . .	50
2.12	Effetti osservabili dalle onde gravitazionali . . . . .	51
2.13	L'interazione di un'onda gravitazionale con la materia . . . . .	54
2.14	La generazione di onde gravitazionali . . . . .	59
2.15	Ordini di grandezza . . . . .	63
2.16	Le sorgenti di onde gravitazionali . . . . .	64
2.16.1	Sistemi binari . . . . .	66
2.16.2	Supernovae . . . . .	69
2.16.3	Pulsar . . . . .	69
2.16.4	Fondo stocastico . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Gli interferometri LISA e Virgo</b>	<b>71</b>
3.1	Rivelatori a barre risonanti . . . . .	71
3.2	L'interferometro di Michelson . . . . .	72
3.3	La rivelazione interferometrica di onde gravitazionali . . . . .	75
3.4	Virgo e la sua funzione di risposta . . . . .	76
3.5	LISA . . . . .	85
3.6	La funzione di risposta di LISA . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Emissione di onde gravitazionali da sistemi binari</b>	<b>96</b>
4.1	L'emissione di onde gravitazionali da sistemi binari . . . . .	96
4.2	Evoluzione dei parametri orbitali . . . . .	97
4.3	Un Buco Nero binario nel Quasar 3C345 . . . . .	99
4.4	Mkn 501 . . . . .	102
4.5	OJ 287 . . . . .	104
4.6	La doppia pulsar . . . . .	107
4.7	Il redshift cosmologico . . . . .	107
4.8	Il contributo dei sistemi binari di buchi neri supermassivi al background di onde gravitazionali . . . . .	110
4.9	Calcolo delle ampiezze della onda gravitazionale che ci si attende da varie sorgenti . . . . .	114
4.10	Il background stocastico . . . . .	117
	<b>Conclusioni</b>	<b>120</b>

<b>Appendice</b>	<b>121</b>
4.11 3C 345 . . . . .	122
4.12 Mkn 501 . . . . .	126
4.13 OJ 287 . . . . .	130
<b>Bibliografia</b>	<b>134</b>





# Introduzione

Il lavoro descritto in questa tesi riguarda la produzione e l'eventuale rivelazione di onde gravitazionali provenienti da nuclei galattici attivi (AGN).

Nel capitolo 1 viene presentata la fenomenologia e la classificazione di queste sorgenti: Viene inoltre trattata la problematica dell'esistenza dei buchi neri supermasivi al centro degli AGN e viene illustrata la loro fenomenologia.

Il capitolo 2 descrive la teoria delle onde gravitazionali nell'ambito della relatività generale. Dopo una breve introduzione storica, che ripercorre i vari passaggi che hanno portato alla formulazione di tale teoria, viene descritta in dettaglio la teoria delle onde gravitazionali. Sono infine illustrate le varie tipologie di sorgenti emettitrici di onde gravitazionali.

Il capitolo 3 è interamente dedicato alla descrizione di due strumenti per la rivelazione di onde gravitazionali: Virgo, già in funzione, e LISA, in fase di realizzazione. Dopo una breve descrizione delle caratteristiche di questa tipologia di strumenti, viene rivisitato il calcolo della funzione di risposta per Virgo, e, successivamente, viene calcolata quella per LISA, utilizzando un procedimento analogo al caso di Virgo.

Il capitolo 4 illustra le caratteristiche ed i dati, disponibili in letteratura, di alcune sorgenti AGN e, per ognuna di esse, è stata calcolata il tempo di coalescenza e l'ampiezza dell'onda gravitazionale.

Le conclusioni di questo lavoro sono illustrate nel capitolo finale.

# Capitolo 1

## I Nuclei galattici e le loro attività

La presenza al centro di galassie di oggetti compatti, di grande massa, in grado di liberare, attraverso processi di accrescimento, enormi quantità di energie in banda radio, ottica, X e  $\gamma$ , è rivelata ormai in un numero molto grande di galassie, mentre al centro di altre è stato possibile constatare per via puramente dinamica, l'esistenza di concentrazioni abnormi di massa, nei nuclei. Questa analisi dinamica ha confermato ciò che prima si poteva affermare solo attraverso considerazioni energetiche, e cioè che le masse concentrate nei nuclei hanno valori che vanno da  $10^6$  a  $10^8 M_{\odot}$ . Considerando ciò che emerge dagli studi sulla variabilità delle loro emissioni, si nota che queste masse sono racchiuse in zone dalle ridotte dimensioni, di qualche giorno luce e anche meno, e si presume che la natura di queste aggregazioni di massa non possa che essere quella di buchi neri, o black hole (BH).

Lo spettro è caratterizzato dalla presenza di righe in emissione, sia permesse che proibite, e da un continuo di natura non termica, la cui intensità può variare su scale temporali comprese tra il secondo e l'anno.

### 1.1 Il quadro generale delle attività nucleari

In alcuni casi le galassie per il resto abbastanza normali possiedono nuclei particolarmente luminosi e di apparenza stellare. Gli spettri di tali nuclei sono stati studiati per la prima volta da Seyfert nel 1943 con la scoperta della presenza di intense righe di emissione sia permesse che proibite. Le righe proibite apparivano abbastanza strette, mentre in alcuni casi le righe permesse

risultavano abbastanza larghe nel dominio delle frequenze con sovrapposta una componente stretta, anche se a volte non troppo evidente, ed era contestualmente presente anche una forte emissione continua, di carattere non stellare, più intensa nel blu, che si scoprì in seguito essere irregolarmente variabile con scale di tempo dai giorni agli anni. Gli oggetti di questo tipo sono stati denominati *Seyfert 1*, quelli nei quali tutte le righe risultavano ugualmente strette *Seyfert 2*.

Oggi si ritiene che la divisione tra queste due classi derivi dalla presenza, attorno al nucleo, di un anello o toro di polveri in grado di oscurare sia la luce del nucleo che quella emessa dalle nubi di gas ad esso vicine, le nubi della cosiddetta *broad lines region* (BLR) che si ritengono responsabili dellemissione della componente allargata delle righe permesse, e sono distanti circa 1 parsec dal disco di accrescimento del buco nero. Il toro invece non oscura i gas della cosiddetta *narrow lines region* (NLR), cui è dovuta l'emissione delle righe proibite e della componente stretta delle righe permesse, gas che si ritengono occupare una regione di spazio più grande, eccedente l'altezza del toro. Queste zone sono in una regione molto più estesa della prima (circa 300 parsec), e più distante dal buco nero rispetto alla BLR (circa 10 - 100 parsec), dove il livello di ionizzazione del gas è più basso. Questa interpretazione ha trovato una conferma nello spettro della componente polarizzata presente nella luce che emerge dalle regioni nucleari delle Seyfert 2, componente che ha l'evidente carattere di luce diffusa da polveri esterne al toro assorbente, e che mostra la presenza di righe permesse larghe, con carattere Seyfert 1.

Si è anche trovato che nelle Seyfert 2 esiste una vasta regione a doppio cono centrata sul nucleo all'interno della quale i gas presenti nella galassia mostrano i grado alto di eccitazione, quale quello che viene provocato dall'assorbimento dei fotoni ultravioletti emessi da un nucleo tipo Seyfert 1, regione che evidenzia in modo diretto la collimazione della luce nucleare.

Attualmente si pensa che tutti questi oggetti abbiano la stessa natura e che le loro diversità viste da Terra dipendano per lo più dall'orientamento rispetto all'osservatore del disco di accrescimento e dei jet fortemente collimati. Tali jet sono alimentati dal gas in caduta ed emergono dai poli dell'asse di rotazione del disco di accrescimento. Questo modello è chiamato appunto Modello Unificato.

## 1.2 Classificazione degli AGN

La categoria dei nuclei galattici attivi (AGN) comprende:

### **Le Galassie di Seyfert**

Prendono il nome dello scienziato che le ha scoperte già nel 1943. Sono in genere galassie a spirale (Sa e Sb), con un nucleo brillante di apparenza stellare o semistellare. Lo spettro ottico del nucleo mostra intense e larghe righe di emissione dovute a ricombinazione di idrogeno e a transizioni proibite in elementi in vari stati di ionizzazione, tipicamente: ossigeno, ferro e azoto. Presentano luminosità nettamente inferiore ma hanno altre caratteristiche simili ai QSO (Quasi Stellar Object). In particolare gli spettri dei Quasar sono molto simili a quelli delle galassie dette di Seyfert Tipo I dal nucleo estremamente attivo. M77 è una galassia di Seyfert ed è tra le più luminose Seyfert del cielo.

### **Le Radiogalassie**

Sono galassie generalmente ellittiche con forte emissione nella banda radio, comparabile energeticamente a quella ottica. Tali galassie, quindi, oltre ad emettere luce visibile sprigionano anche onde radio attraverso un meccanismo che trova la sua origine nel movimento a velocità prossime a quella della luce di elettroni immersi in campi magnetici molto intensi. Tale emissione viene chiamata radiazione di sincrotrone, a causa della somiglianza del processo con quello che ha luogo negli acceleratori di particelle. Presentano all'osservazione strutture molto estese di dimensioni anche dell'ordine di 1.5 Mpc (Mpc: 3,26 milioni di a.l.), nelle quali sono spesso riscontrabili una coppia di jet, che si dipartono in direzioni opposte rispetto al nucleo. Per fare un esempio sono radiogalassie M82 e M87 o Virgo A.

Tutte le radiosorgenti, siano esse radiogalassie o quasar, osservate a lunghezze d'onda decimetriche o centimetriche, risultano dotate di una componente radio compatta che coincide con il nucleo della galassia. Nei quasar con radioemissione questa componente spesso è dominante.

La sorgente nucleare risulta solitamente connessa con i lobi attraverso strutture più o meno sottili note come jet. Abbastanza spesso solo uno dei jet risulta visibile, anche se l'altro lascia intuire la propria presenza attraverso i suoi effetti, in particolare gli hot spot, cioè delle zone con elettroni di energia particolarmente elevata, che si formano al margine esterno dei lobi là

dove si pensa che l'energia trasportata dal jet venga convertita in particelle relativistiche.

Le radiosorgenti che a 178 MHz presentano una emissività  $L > 5 \times 10^{25} \text{ W Hz}^{-1}$  usualmente presentano hot spot, hanno il massimo della brillantezza nella zona dei lobi maggiormente distante dal nucleo e dimensioni che di regola superano quelle delle galassie ospiti: esse sono note come sorgenti del tipo II di Faranoff-Riley, FR II. Nelle sorgenti di potenza minore gli hot spot sono solitamente assenti, la brillantezza declina dall'interno all'esterno e le dimensioni sono normalmente minori di quelle delle galassie che le ospitano: esse costituiscono il tipo I di Faranoff-Riley, FR I. In certi casi la radiazione di sincrotrone si estende fino al dominio ottico, ed eventualmente in X. In questi casi la regione di emissione si riduce ad un jet che esce dal nucleo galattico.

I RLQ risultano di norma associati a sorgenti del tipo FR II, le altre sorgenti dello stesso tipo risultano invece radiogalassie. Dal punto di vista dello spettro ottico esse si distinguono in radiogalassie a righe larghe, *broad lines radio galaxies* (BLRG), ed in radiogalassie a righe strette, *narrow lines radio galaxies* (NLRG), con caratteristiche spettrali del tutto analoghe alle Seyfert 1 ed alle Seyfert 2. Così come i quasar costituiscono un caso estremo delle Seyfert 1, allo stesso modo le RLQ costituiscono il caso estremo delle radiogalassie a righe larghe.

Anche nel caso delle radiogalassie a righe strette è stato possibile, in alcuni casi, mettere in evidenza la presenza di righe larghe nella luce diffusa proveniente dalla regione nucleare. La differenza tra RLQ e radiogalassie a righe larghe da un lato, e radiogalassie a righe strette dall'altro, può così essere fatta risalire, come quella tra Seyfert 1 e Seyfert 2, alla presenza, attorno all'oggetto centrale, di un toro di polvere oscurante ed alle sua particolare orientazione rispetto all'osservatore.

Le radiosorgenti forti, di tipi Faranoff II, quando non coincidono con un quasar, sono localizzate in galassie ellittiche di alta luminosità. Questo fa supporre che anche le galassie ospiti dei quasar radio siano ellittiche giganti.

Le Seyfert classiche risiedono invece in genere in galassie a disco, nessuna delle quali è dotata di radioemissione particolarmente forte. Da qui fu ipotizzato che i quasar non dotati di forte radioemissione, i radio quiet appunto, siano anch'essi associati a galassie a disco, e recenti studi sembrano confermare questa

ipotesi.

### **Quasar o Oggetti quasi stellari (QSO - Quasi Stellar Object)**

Negli anni '60 si tentò di identificare in luce visibile alcuni oggetti celesti che emettevano onde radio. La Radiosorgente 3C48 (3C sta per III Catalogo di Radiosorgenti dell'Osservatorio di Cambridge) fu identificata con una stellina azzurra di solo magnitudine 16 che, vista la potenza della sorgente radio, appariva otticamente assai debole. Nel 1960 il grande astronomo americano Allan Sandage ottenne uno spettro di 3C48 che presentava delle righe allargate in modo anomalo. Nel 1963 molti astronomi, tra i quali Cyril Hazard, rivolsero i loro strumenti verso la radiosorgente 3C273 mentre era occultata dal bordo del disco lunare e trovarono la posizione esatta della sorgente di microonde. L'occultamento fu necessario perché i radiotelescopi dell'epoca potevano stabilire la posizione di una sorgente con al meglio un margine di errore di 5 sec d'arco. L'astronomo olandese Maarten Schmidt prese uno spettro della controparte ottica di questa radiosorgente, una stellina di magnitudine 13, che presentava forti similitudini con lo spettro di 3C48. Schmidt provò a interpretare le righe spettrali come se esse apparissero spostate in lunghezza d'onda a causa di un fortissimo spostamento verso il rosso (Redshift), provocato da un oggetto in rapido moto di allontanamento. La cosa funzionò e le righe così andarono a corrispondere a quelle già note presenti in altri corpi celesti. Il procedimento venne ripetuto per 3C48 e per altre sorgenti simili, per le quali fu coniato il termine Quasi Stellar Radio Source (QSRS), ossia Radiosorgente quasi stellare. I Quasar sono molto luminosi anche nei raggi X. Il Quasar 3C273, uno dei più vicini e dei più luminosi, emette in tale lunghezza d'onda quanto nel visibile e l'emissione è in prevalenza concentrata nel nucleo. Dista dalla Terra 2,1 miliardi di anni luce (e 3C48 a ca. 3,5 miliardi a.l.) e fu il primo ad essere riconosciuto come Quasar. La sua luminosità è l'equivalente a quella di 1000 galassie tipo Via Lattea. Con i grandi telescopi si intravede anche un jet lungo 150 mila anni luce che fuoriesce dal Quasar. Non tutti i Quasar emettono onde radio. Anzi la maggior parte degli oggetti di elevatissimo Redshift, di aspetto stellare e che mostrano grandi produzioni di energia, tutti tratti distintivi dei Quasar, è radio-quiet, ossia radio silenziosa. Un uso che si va sempre più diffondendo è quello di chiamare tutti i corpi di questo tipo, semplicemente QSO, oppure accogliendo il suggerimento di Maarten Schmidt,

avanzato nel 1970, semplicemente QSR, e di chiamare RLQ, ossia radio loud quasar, gli oggetti dotati di una notevole emissione nel radio e RQQ, radio quiet quasar, gli oggetti dotati di una emissione radio marginale. Usando la definizione di Kellerman del 1989, le due classi risultano nettamente distinte: si possono definire i RQQ come quelli oggetti per cui  $R = L_{5\text{ GHz}}/L_{4400\text{ \AA}} < 10$ . All'interno della classe dei radio quiet il 5-10% degli oggetti mostra ampio assorbimento nel blu delle righe di emissione risonanti. Questi oggetti sono denominati BAL, broad absorption lines. E' evidente che l'assorbimento sia determinato da materiale espulso dal Quasar che si muove verso la Terra lungo la linea di vista con velocità da zero fino ad alcune migliaia di Km/s. Bisogna considerare un'altra sottoclasse in cui si possono suddividere i radio quiet: gli oggetti nei quali lo spettro risulta piatto, e quindi  $\alpha \simeq 0$ , e quelli che hanno lo spettro ripido, per cui  $\alpha > 1$ .

I quasar con spettro radio piatto, oltreché per la compattezza e la frequente variabilità radio, si distinguono per tempi scala della variabilità minori ed il più ampio grado di variabilità nell'ottico, venendo così largamente a coincidere con la classe dei quasar OVV (vedi nel seguito), o blazar.

### **I Blazar**

Tali oggetti (da Blazar: vampata) comprendono classi di AGN caratterizzati da un elevato grado di polarizzazione dello spettro continuo e mostrano variabilità molto rapide, su scale di tempo generalmente dell'ordine del giorno, sia in intensità che in direzione, del continuo ottico. Essi comprendono:

- *Oggetti BL Lac* Sorgenti luminosissime, simili ai quasar radioemittenti ma con assenza di righe di emissione e sono molto variabili nella banda ottica, radio dei raggi X. Si trovano generalmente al centro di galassie ellittiche giganti e devono il loro nome al loro prototipo che è la variabile BL Lacerate.
- *Optically Violent Variables - O.V.V.* Possiedono caratteristiche simili agli Oggetti BL Lac ma il loro spettro presenta larghe righe di emissione, peraltro più deboli rispetto ai quasar.

Si ritiene che ciò che rende praticamente invisibili nei BL Lac le righe di emissione che caratterizzano gli altri AGN sia la peculiare ed eventualmente

transitoria intensità del continuo. Le righe infatti, quando il continuo diminuisce di intensità, si rendono visibili, così come è accaduto nel caso del Quasar PKS 0521-36, che presentava nel 1975 le caratteristiche di un BL Lac e che 6 anni dopo apparì quale normale Seyfert 1.

I blazar sono anche gli unici oggetti dove di frequente la radiazione  $\gamma$  tra 100 MeV e 3 GeV, o addirittura nel caso del BL Lac Mkn 421 fino a 10 GeV, risulta energeticamente dominante e dove la struttura dell'immagine radio nella regione nucleare risulta altamente variabile per l'eiezione di nubi di plasma relativistico che si osservano allontanarsi dal nucleo con velocità apparenti superiori a quella della luce, con moti cioè superluminali.

### **Le galassie Starburst**

Sono quelle in cui il tasso di formazione stellare è molto superiore alla media (nella nostra galassia, che è abbastanza tipica, nasce invece circa 1 stella al mese) e così intenso che non può essere sostenuto lungo l'arco dell'intero loro tempo di vita.

Il loro spettro ottico è tipico di regioni di bassa ionizzazione e ci dice che c'è una notevole presenza di stelle giovani (attività favorita anche dall'interazione tra galassie); le Starburst presentano una forte emissione nell'infrarosso. Questi oggetti devono le loro peculiarità ad un aumento della formazione stellare, e non sono quindi AGN in senso stretto. La loro morfologia è a spirale, ma buona parte di tali oggetti (ca. 25%) appartiene probabilmente a sistemi in interazione.

### **I Liner - “Low Ionization Nuclear Emitting Region”**

Presentano nel loro spettro, oltre alle righe della “Serie di Balmer”, una forte emissione di righe di bassa ionizzazione (righe in emissione di elementi neutri), nonché righe in assorbimento tipiche delle normali galassie. Tali oggetti rappresentano la coda di bassa luminosità degli AGN e sono relativamente frequenti nelle galassie dei primi tipi morfologici.

### **Le galassie di Markarian**

Sono state identificate attraverso una ricerca sistematica di galassie con un eccesso ultravioletto nel continuo, effettuata con un prisma-obiettivo montato al telescopio Schmidt dell'Osservatorio Byurakan in U.R.S.S.. Esse comprendono molte galassie di tipo Starburst e per ca. il 10% si tratta di galassie di Seyfert.

### **Galassie III**

Sono galassie il cui nucleo presenta uno spettro con sottili righe,



caratteristiche delle regioni di idrogeno ionizzato (HII), ionizzazione provocata dall'energia ultravioletta di stelle calde.

### **Galassie IRAS**

Sono galassie luminosissime nella banda del lontano infrarosso e prendono il nome dal satellite che ha permesso di identificarle.

### **I quasar di tipo II**

Grazie all'osservatorio spaziale per raggi X Chandra, gli astronomi hanno potuto osservare un oggetto di cui da 20 anni ipotizzavano l'esistenza: un quasar di tipo II. Molto probabilmente nei prossimi anni verranno scoperti ancora diversi di questi oggetti, grazie ulteriori osservazioni.

I quasar di tipo II sono molto simili a quelli normali, a parte il fatto che sono circondati da un alone di gas e polvere che ne riduce la luminosità nel visibile. Secondo gli astronomi, questi oggetti evolverebbero poi in quasar normali a mano a mano che soffiano via la materia da cui sono circondati. In pratica, quindi, i quasar di tipo II sono oggetti più antichi degli altri. Il gruppo che ha compiuto la scoperta, che comprende anche Riccardo Giacconi, ha analizzato le osservazioni compiute con Chandra e altre nel visibile effettuate da terra con uno dei telescopi del VLT (Very Large Telescope). Immediatamente dal confronto è emerso un oggetto con le caratteristiche esatte previste dalla teoria: una intensa emissione nei raggi X e sottili righe in emissione nello spettro visibile.

Ora gli astronomi aspettano di vedere quanti altri di questi oggetti verranno scoperti, per poter confrontare le loro popolazioni.

#### **1.2.1 I moti superluminali**

Questo fenomeno è spiegabile con nubi in moto a velocità prossime a quelle della luce che si avvicinano all'osservatore, lungo direzioni che formano angoli abbastanza ridotti con la linea di vista. Si consideri un grumo di gas che al tempo  $t_0$  sia emesso da S e che al tempo  $t_1$  giunga in S' (per uno schema si veda la figura 1). Posto  $\Delta t = t_1 - t_0$ , un osservatore alla distanza  $d$ , posto ad un angolo  $\theta$  rispetto alla congiungente di S con S', osserverà l'emissione di un grumo di gas da S al tempo:

$$t'_0 = t_0 + \frac{d}{c} \quad (1.1)$$

e l'arrivo di un grumo di gas in S' al tempo:

$$t'_1 = t_0 + \Delta t + \frac{(d - v \Delta t \cos \theta)}{c} \quad (1.2)$$

tempi che differiscono di:

$$\Delta t = t'_1 - t_0 = \Delta t \left( 1 - \frac{v \cos \theta}{c} \right) \quad (1.3)$$

La distanza angolare tra S e S' d'altra parte risulta:

$$\Delta \alpha = \frac{v \Delta t \sin \theta}{d} \quad (1.4)$$

quindi si ottiene che la velocità apparente è data da:

$$v_{\text{app}} = \frac{\Delta \alpha d}{t'_1 - t_0} = \frac{v \sin \theta}{1 - (v/c) \cos \theta} \quad (1.5)$$

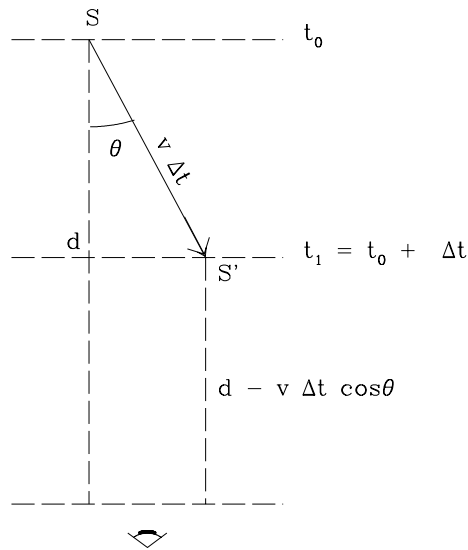


Figura 1.1: Schema che spiega i moti superluminali.

Se per esempio si ha un angolo  $\theta = 10^\circ$  e  $v = 0.9c$  si trova una  $v_{\text{app}} = 1,37c$ . Se invece la nube si allontana, quindi  $\theta > 90^\circ$ , l'emissione del grumo di gas presenta un flusso assai ridotto. Infatti l'alta direzionalità di questi fenomeni fa sì che divengano preminenti solo quando l'angolo tra l'asse di eiezione e la linea di vista non supera i  $10^\circ - 20^\circ$ . Ciò spiega perché essi

siano osservati solo in una ridotta frazione dei RLQ, anche se si sospetta che, visti da angoli opportuni, tutti gli oggetti di questa classe, e in genere tutti gli oggetti con una fenomenologia radio del tipo Fanaroff-Riley II (Vedi discussione nel paragrafo 1.3.1), debbano presentarli.

### 1.3 Lo spettro degli AGN

Come si è già accennato la distribuzione spettrale di energia degli AGN si estende su un amplissimo campo di energie, che nel caso delle Seyfert va dal radio fino agli X duri, di 200 keV ed oltre. E' uno spettro sostanzialmente piatto, con un eccesso nell'ultravioletto che permette di distinguerli dalle stelle. Questa parte di spettro (UV) si pensa sia dovuta a un'emissione termica dal disco di accrescimento. Nell'ottico non si distingue facilmente la presenza degli AGN al centro di una galassia perché la luce stellare della galassia ospite è più forte della luce proveniente dal nucleo.

Nello spettro sono presenti righe di assorbimento e di emissione di cui si è già accennato. Si può aggiungere che le regioni BLR sono più dense e più vicine al nucleo. La sorgente responsabile di queste righe è in moto, con velocità elevata, e questo si intuisce proprio dall'allargamento della riga. Le NLR sono dovute a sorgenti che possiedono un moto più lento, infatti sono righe strette.

Lo spettro dei Quasar inoltre mostra una fitta serie di righe strette di assorbimento, sovrapposte allo spettro continuo. Esse si formano quando la luce del QSO giunge su un mezzo, che può essere una nube o il mezzo intergalattico (IGM), che è frapposto fra il QSO e la linea di vista. Se tale mezzo è lontano dalla Terra, le righe presenteranno un alto redshift. Se poi le nubi incontrate sono più di una, ci saranno più set di righe e ogni set corrisponderà ad un particolare mezzo o ad una particolare nube. Negli spettri sono presenti due classi di righe di assorbimento:

- a) The Lyman- $\alpha$  forest: si presenta come un denso boschetto di righe di assorbimento dell'idrogeno (HI), ma sono state osservate anche righe di assorbimento di He II primordiale;
- b) Righe dovute a metalli ionizzati: CIV, MgII e altre. E' un mix di elementi simile a quello del mezzo interstellare della nostra galassia, la Via Lattea,

e ciò potrebbe indicare il fatto che il materiale presente è stato processato dalle stelle e quindi è stato arricchito di vari elementi. Si pensa quindi che queste righe si formino proprio per il passaggio della radiazione emessa dagli AGN attraverso gli aloni intergalattici che si trovano lungo la linea di vista tra la Terra e la sorgente.

E' utile conoscere tali spettri perché si possono avere informazioni dettagliate sulla storia cosmologica del mezzo intergalattico (IGM). Conoscendo due QSO angularmente vicini in cielo, la cui radiazione attraversa dunque regioni adiacenti del mezzo interstellare, si possono valutare le proprietà dello stesso mezzo su piccola scala angolare.

Grazie al notevole spostamento verso il rosso, negli AGN si osservano righe che sarebbero altrimenti invisibili a causa dell'opacità dell'atmosfera a certe lunghezze d'onda; in modo del tutto analogo, righe normalmente visibili escono dalla banda osservabile.

In uno stesso spettro si potranno trovare le righe dell'atomo d'idrogeno (H, H $\alpha$ , H $\beta$  e Ly) ma anche quelle di CIV ( $\lambda = 1549 \text{ \AA}$ ), CIII ( $\lambda = 1909 \text{ \AA}$ ), MgII ( $\lambda = 2798 \text{ \AA}$ ), [NeV] ( $\lambda = 3426 \text{ \AA}$ ), [OII] ( $\lambda = 3727 \text{ \AA}$ ), [NeIII] ( $\lambda = 3869 \text{ \AA}$ ), [OIII] ( $\lambda = 5007 \text{ \AA}$ ). Nelle figure 1.2 e 1.3 possiamo vedere due esempi di spettri di quasar: 3C273 fu il primo oggetto ad essere identificato come quasar e presenta uno spostamento verso il rosso (redshift) di  $z = 0.1575$ . L'altro quasar, APM08279+5255 ha un redshift ben più elevato ( $z = 3.87$ ) che designa quindi un oggetto molto lontano e antico.

Sino a non molto tempo fa comunque, mentre lo spettro dei quasar era conosciuto fino all'ultravioletto estremo attraverso l'osservazione da Terra di oggetti di alto  $z$ , lo spettro dei nuclei di Seyfert era invece noto, causa l'assorbimento dell'atmosfera terrestre, solo a lunghezza d'onda superiori ai  $3200 \text{ \AA}$ . Oggi invece, specie per merito delle osservazioni condotte fuori dall'atmosfera dai vari telescopi come IUE (International Ultraviolet Explorer) HST (Hubble Space Telescope) e l'HUT (Hopkins Ultraviolet Telescope) è stato osservato fino a  $912 \text{ \AA}$ , la lunghezza d'onda del limite della serie di Lyman oltre la quale la capacità dei fotoni di ionizzare l'idrogeno neutro presente nel disco e nell'alone della nostra galassia preclude, fino alla banda X, ogni osservazione. Questo ha fatto sì che gli studi sulle due categorie procedessero separatamente,

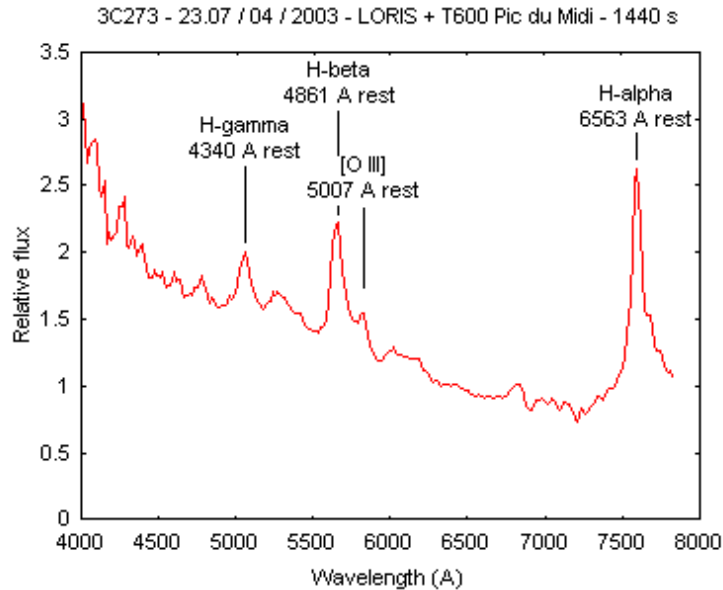


Figura 1.2: 3C273 - Quasar ( $z=0.1575$ ), RA =  $12^{\text{h}}29'1$  - DEC =  $+02^{\circ}03'$  -  $M_V = 12.5$ . Un redshift di  $z = 0.1575$  permette di riconoscere le abituali righe spettrali: H- $\alpha$  H- $\beta$  H- $\gamma$ , e OIII. Infatti queste righe mostrano uno spostamento verso il rosso di circa  $100 \text{ \AA}$  rispetto alla loro posizione a riposo (rest). Tale spostamento permette di dedurre il redshift dell'oggetto e quindi la sua velocità propria e la sua distanza. (dal sito [www.astrosurf.com](http://www.astrosurf.com))

fino a quando le osservazioni dallo spazio hanno rivelato l'estrema somiglianza degli spettri.

Oggi si può dire con certezza che la parentela tra i due spettri è molto stretta. La distinzione tra Seyfert e Quasar all'origine era di carattere operativo, oggi invece viene quantificata, secondo la definizione di Véron-Cetty e Véron 1991 secondo cui possono essere definiti Seyfert i nuclei meno brillanti di  $M_V = -23$  e quasar quelli maggiori di questa quantità.

Bisogna fare un'ulteriore divisione tra gli AGN radio e i quasar. La fenomenologia degli AGN radio, detti radiogalassie, è molto interessante e anche molto varia. In particolare, si chiamano radiogalassie le sorgenti radio extragalattiche con  $L > 10^{41} \text{ erg s}^{-1}$ . Queste si dividono convenzionalmente in due classi, a seconda dell'identificazione ottica: **quasar** (quasi-stellar radio sources) se la controparte ottica è puntiforme (QSO); **radiogalassie** se la controparte ottica non è un QSO (a volte non si vede un nucleo apprezzabile in ottico).

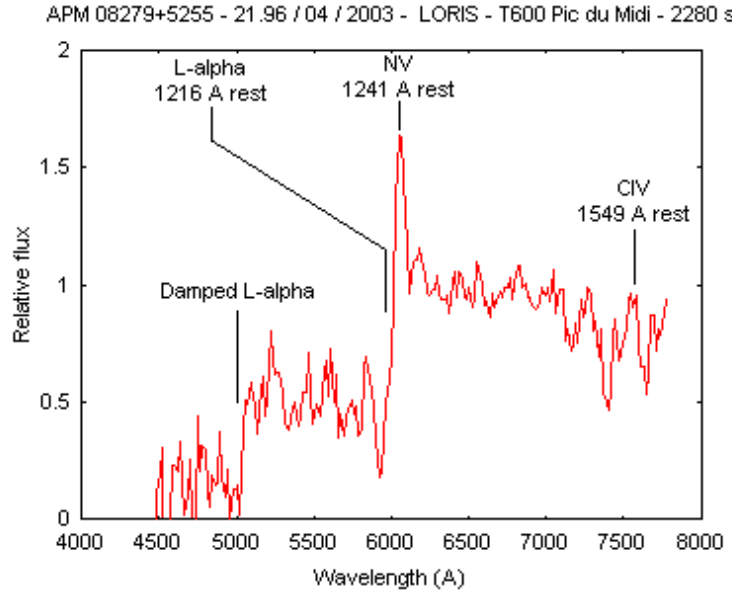


Figura 1.3: APM08279+5255-Quasar( $z=3.87$ ) RA =  $8^h31.7'$ - DEC =  $+52^\circ45'$  -  $M_V = 14.8$  Lo spostamento spettrale verso il rosso (redshift  $z = 3.87$ ) è tale da rendere difficile riconoscere le righe normalmente presenti nella regione di spettro corrispondente al visibile: la riga Lyman-alfa è, per esempio, spostata a circa  $5800 \text{ \AA}$  (invece di  $1216 \text{ \AA}$  a riposo!) e accompagnata da una “foresta di righe” L- $\alpha$  rivelatrice della presenza di materia intergalattica distante attraversata dalla luce del quasar prima di raggiungerci. (dal sito [www.astrosurf.com](http://www.astrosurf.com))

La tipica manifestazione radio di un AGN potente nel radio è quella di una sorgente radio centrale compatta, corrispondente al nucleo della galassia, da cui si dipartono uno o due jet e lobi radio. Tali strutture possono essere estese fino a  $\sim 1 \text{ Mpc}$ . Infine, notiamo che quasi tutti gli AGN, nonché le galassie starburst, presentano emissione radio nucleare, di ampiezza minore del limite di  $10^{41} \text{ erg s}^{-1}$ ; in questi casi non sono presenti lobi radio.

Buona parte del flusso radio sia delle radio galassie che dei quasar proviene da due regioni di spazio, che sono appunto i lobi radio, che possono superare anche di molto le dimensioni della galassia a cui sono associate. Gli spettri, e la polarizzazione della radiazione, mostrano come la radioemissione abbia origine dall'interazione di una distribuzione non termica di particelle (le quali, per la loro facilità nell'irraggiare, si ritiene siano elettroni) con campi magnetici ordinati. L'emissione ha dunque luogo attraverso il meccanismo della radiazione di sincrotrone.

### 1.3.1 La radiazione di sincrotrone

Un elettrone relativistico di energia  $E = \gamma m_0 c^2$ , che si muova a velocità costante  $v = \beta c$  all'interno di un campo magnetico uniforme  $B$ , a causa della forza di Lorentz percorrerà una traiettoria circolare di raggio  $\rho$  (1.4):

$$\rho = \frac{E\beta}{Be} \approx \frac{E}{Be} \quad (1.6)$$

(per elettroni relativistici  $\beta \sim 1$ )

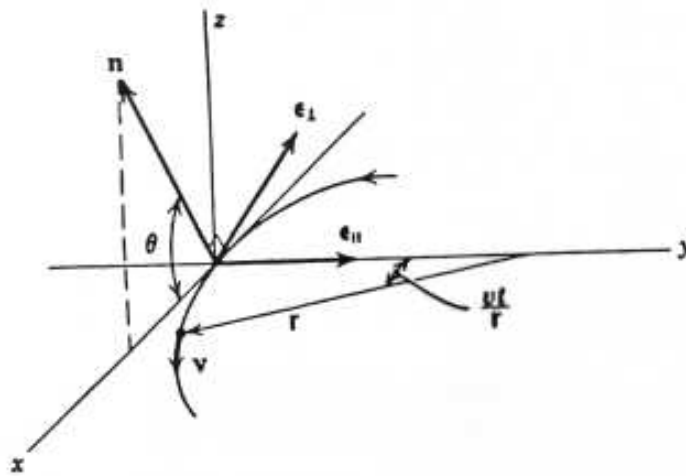


Figura 1.4: Traiettoria di un elettrone in un campo magnetico uniforme

La carica emetterà quindi radiazione irraggiando la potenza

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^4 c^2}{(m_0 c^2)^4} E^2 B^2 \quad (1.7)$$

Questa formula, derivata nel 1944 da Iwanenko e Pomeranchuk, descrive la potenza irraggiata da una carica relativistica di energia  $E$  che si muova all'interno di un campo magnetico uniforme  $B$ . Si può osservare che la potenza irraggiata cresce con il quadrato dell'energia, ma decresce con la quarta potenza della massa a riposo  $m_0$ . Questo significa che ci si deve aspettare un irraggiamento apprezzabile solo nel caso di elettroni o positroni di alta energia.

Agli albori della tecnologia degli acceleratori di particelle l'emissione di sincrotrone era considerata un noioso inconveniente, in quanto era necessario fornire in continuazione agli elettroni l'energia che essi perdevano a causa dell'irraggiamento. Tuttavia in breve tempo ci si rese conto che le caratteristiche peculiari della radiazione emessa potevano essere utilizzate per molte applicazioni. Le caratteristiche che rendono interessante la radiazione di sincrotrone sono:

- a) grande larghezza di banda, che si estende a fotoni UV, X e  $\gamma$ ;
- b) accordabilità: avere a disposizione una banda di emissione larga è molto utile, in quanto è possibile selezionare la frequenza desiderata all'interno di un range molto esteso, che può andare dall'infrarosso ai raggi x duri (accordabilità spettrale).
- c) elevata intensità
- d) elevata polarizzazione

Lo spettro di emissione della radiazione di sincrotrone è riportato in fig. 1.5.

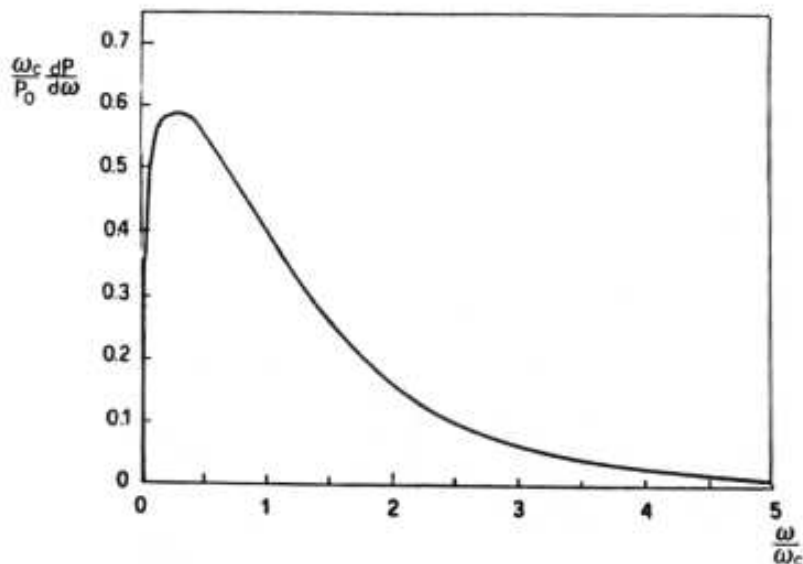


Figura 1.5: Spettro della emissione di sincrotrone

La frequenza  $\omega_c$  è detta frequenza critica, ed è espressa dalla formula:



$$\omega_c = \frac{3c}{2\rho} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^3 = \frac{3c}{2\rho} \gamma^3 \quad (1.8)$$

dove  $\rho$  è il raggio di curvatura espresso dalla (2.2) e  $\gamma$  è il fattore relativistico:

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} \quad (1.9)$$

A causa degli effetti relativistici, la radiazione non verrà emessa dagli elettroni su tutto l'angolo solido, bensì all'interno di un cono di apertura  $\theta$  nella direzione del moto. L'ampiezza del cono di luce è data da:

$$\theta = \frac{m_0 c^2}{E} = \frac{1}{\gamma} \quad (1.10)$$

Nel caso di elettroni fortemente relativistici il valore di  $\theta$  può essere assai piccolo, dando origine ad un'emissione molto direzionale. Aumentando l'energia degli elettroni, aumenta la potenza emessa e la stessa si concentra lungo la direzione del moto.

La direzionalità dell'emissione può spiegare le caratteristiche spettrali della radiazione di sincrotrone: consideriamo la luce emessa da un elettrone che si muova lungo una traiettoria circolare di raggio  $r$ . Come rappresentato in fig. 1.6, un ipotetico osservatore potrà osservare la radiazione emessa solo quando sarà investito dal cono di luce, vale a dire fintanto che l'angolo tra la tangente alla traiettoria e la direzione di osservazione sarà minore dell'angolo  $\theta$ .

Questo equivale a dire che l'osservatore vedrà la radiazione emessa lungo l'arco di lunghezza  $l_e = 2\theta\rho$ . La durata dell'impulso di luce così generato sarà quindi pari alla differenza tra il tempo di transito dell'elettrone lungo l'arco  $l_e$  e dei fotoni lungo la corda  $l_p = 2\rho \sin \theta$ .

Il fatto che l'angolo  $\theta$  sia piccolo per elettroni estremamente energetici ( $\theta \sim 1/\gamma$ ) produrrà impulsi di luce molto brevi, il che risulta in una elevata larghezza della banda di emissione.

Avere a disposizione una banda di emissione larga è molto utile, in quanto è possibile selezionare la frequenza desiderata all'interno di un range molto esteso, che può andare dall'infrarosso ai raggi x duri (accordabilità spettrale). Tuttavia il fatto che la potenza totale sia distribuita su una vasta regione spettrale fa sì che la potenza per unità di frequenza risulti piccola.

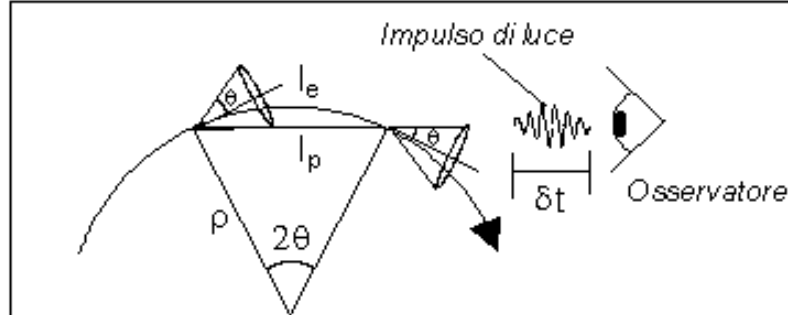


Figura 1.6: Spiegazione geometrica delle caratteristiche spettrali dell'emissione di sincrotrone(www.frascati.enea.it)

## 1.4 Valutazione delle masse dei nuclei galattici attivi

Ci sono vari metodi per calcolare la massa dei nuclei galattici attivi. Una possibile è quella che ci fornisce il criterio di Eddington, che ci dice qual è il valore della massa minima necessaria perché la pressione di radiazione connessa alla luminosità di accrescimento di un corpo celeste non possa inibire l'accrescimento stesso. Considerando che la luminosità limite, o limite di Eddington è data da:

$$L_E = \frac{4\pi c G m_H}{\sigma_T} = 1.38 \times 10^{38} \text{ erg s}^{-1} = 3.4 \times 10^4 \frac{M}{M_\odot} L_\odot \quad (1.11)$$

e risolvendo rispetto a M si ottiene:

$$M \geq 2.9 \times 10^{-5} \frac{L}{L_\odot} M_\odot \quad (1.12)$$

Per una luminosità bolometrica tipica di  $10^{47} \text{ erg s}^{-1}$ , si trova che la massa dell'oggetto centrale debba essere maggiore di  $10^9 M_\odot$ . I nuclei Seyfert sono

meno luminosi, per loro  $L \approx 10^{43} \text{ erg s}^{-1}$  e la massa prevista è dunque di  $10^5 M_{\odot}$

Una seconda strada si ha valutando l'emissione di sincrotrone e l'energia ad esso connessa. Si trova che l'energia immagazzinata nella zona dalla quale proviene la radioemissione non può essere inferiore a:

$$E_{\min} = (1 + \alpha)^{4/7} V^{3/7} \phi^{3/7} L^{4/7} \quad (1.13)$$

dove con  $\alpha$  si indica il rapporto tra l'energia immagazzinata in protoni ed altri eventuali nuclei atomici, che possedendo massa elevata, non contribuiscono sensibilmente all'emissione di sincrotrone,  $V$  è il volume totale da cui proviene l'emissione,  $L$  la luminosità totale della sorgente, e  $\phi$  è il *filling factor* o fattore di riempimento, ossia la frazione di volume complessivo effettivamente occupato da gas di elettroni e dal campo magnetico. Osservando le immagini delle radiosorgenti sembra che la zona attiva sia una struttura filamentosa. Ipotizzando  $\alpha = 100$  (valore tipico per i raggi cosmici nella nostra galassia) e  $\phi = 0.1$ , si trova che nei lobi radio deve essere immagazzinata una quantità di energia pari a circa  $3 \times 10^{60} \text{ erg}$ , che equivalgono a  $2 \times 10^6 M_{\odot}$ . Ponendo  $\alpha = 0$  e  $\phi = 1$  si trova una massa di poco minore:  $0.5 \times 10^6 M_{\odot}$ . Un'altra grandezza da considerare è la variabilità, perché essa mostra le dimensioni della regione dalla quale proviene la luce irraggiata. Una sorgente di luce estesa infatti non può mostrare ad un osservatore esterno variazioni con tempi scala più brevi del tempo che la luce impiega per percorrere distanze dell'ordine delle sue dimensioni. Ciò perché un osservatore vede prima variare la luce proveniente dalla parte della sorgente più vicina a lui, più tardi quella proveniente dalle zone più lontane.

Se si indica con  $\Delta l$  le dimensioni della sorgente e  $\Delta t$  il tempo di variazione, deve cioè essere:

$$\Delta l \leq c \Delta t \quad (1.14)$$

Il confronto tra i ritardi relativi delle variazioni osservate a più frequenze permette di stimare le distanze che intercorrono tra le zone dalle quali provengono le varie emissioni. In genere le variazioni in X ed ultravioletto

precedono di qualche giorno quelle del continuo ottico. L'infrarosso vicino segue con ritardi di un ordine di grandezza superiore.

Conoscendo la variabilità si riesce a porre dei limiti superiori alle masse dei nuclei galattici. Si consideri il raggio di Schwarzschild:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} = 2.96 \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ km} \quad (1.15)$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale e  $c$  è la velocità della luce.

Il raggio di Schwarzschild rappresenta l'orizzonte degli eventi. Questo significa che un corpo materiale  $A$ , la cui traiettoria attraversi, provenendo dall'esterno, il raggio di Schwarzschild di un altro corpo  $B$ , non ha alcuna possibilità di sfuggire successivamente alla sua attrazione gravitazionale. In altri termini se il corpo  $A$  si avvicina al corpo  $B$  al punto da attraversare il suo orizzonte degli eventi, la sua traiettoria non potrà più attraversare questo confine in allontanamento dal corpo  $B$ . Il raggio di Schwarzschild rappresenta naturalmente un orizzonte degli eventi anche dall'interno, nel senso che, immaginando che il corpo  $A$  si separi dal corpo  $B$  a una distanza dal suo centro minore di  $R_S$ , la sua traiettoria rimarrà confinata per sempre all'interno di  $R_S$ .

In relatività generale queste proprietà si estendono anche ai raggi di luce (o, per meglio dire, a qualsiasi forma di radiazione elettromagnetica) incidenti su un corpo materiale o emessi da esso.

Per tutti gli oggetti astrofisici ordinari (pianeti, stelle) il raggio di Schwarzschild cade ben all'interno del loro raggio effettivo. Ad esempio il Sole ha un raggio di Schwarzschild di circa 3 Km, a fronte di un raggio effettivo di circa 700 000 Km. È chiaro allora che per gli oggetti ordinari, la presenza di un orizzonte degli eventi non ha alcun effetto pratico.

Un buco nero non rotante è, invece, un corpo materiale sferico di massa  $M$  interamente confinata all'interno del suo raggio di Schwarzschild.

Le dimensioni delle regioni dalla quale proviene l'emissione da un AGN non possono essere inferiori al diametro della minima orbita stabile, 1, 2 e 9 raggi di Schwarzschild sia nel caso di buco nero di Kerr, ossia rotanti e di buco nero di Schwarzschild rispettivamente. Si deve perciò avere:

$$(1 - 6)R_S = (3 - 18) \times 10^5 \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \leq c\Delta t \quad (1.16)$$

e da qui risulta:

$$M \leq (1.7 - 10) \times 10^4 \Delta t M_\odot \quad (1.17)$$

Questo metodo è stato applicato da Wandel e Mushotzky ad una trentina di oggetti considerando i tempi caratteristici della variabilità in X, che di tutte è la più rapida, ed ottenendo limiti superiori per le masse compresi tra  $2 \times 10^6$  e  $1.5 \times 10^{10} M_\odot$ .

Utilizzando un altro metodo hanno trovato masse dello stesso ordine di grandezza. Dalle caratteristiche degli spettri hanno ricavato la distanza tipica che separa le nubi che emettono le righe proibite dalla sorgente di fotoni ionizzanti, cioè dal nucleo dell'oggetto attivo. Attribuendo la larghezza delle righe ai moti che permettono alle nubi di sostenersi contro l'attrazione del nucleo, essi hanno stimato la velocità delle nubi nel campo gravitazionale del nucleo. Unendo le informazioni su velocità e distanza delle nubi si ricava una stima della massa del nucleo.

La coerenza delle masse così ricavate con i limiti ricavati dalla variabilità X, mostra come la regione dalla quale proviene il flusso X si trovi effettivamente nelle immediate vicinanze del buco nero.

Con le masse così ricavate risulta che la luminosità degli oggetti è di solito compresa tra 1/10 ed 1/100 della luminosità di Eddington.

Ci sono anche altri metodi, che vanno dalla usuale spettroscopia a tecniche radioastronomiche in grado di fornire alte risoluzioni nel caso degli studi dell'emissione dei maser OH. Tuttavia in questi casi si parla sempre di materia interna a volumi assai più grandi di quelli della regione nucleare vera e propria.

## 1.5 Esistenza di sistemi binari di Buchi neri supermassivi

Si pensa che nel nostro universo esistano e che siano molto comuni i sistemi di buchi neri binari (BBH), e si crede che il modo più probabile in cui si formino sia quello per cui due galassie, che hanno nel loro centro buchi neri supermassivi, si fondano. L'eventuale fusione di buchi neri massivi produce un forte segnale

di onde gravitazionali. Lo studio dei sistemi di buchi neri binari massivi è molto importante, sia perché può fornire delle importanti indicazioni sui modelli di formazione delle galassie e sulla loro evoluzione, e anche perché potrebbe permettere di comprendere in che maniera i buchi neri evolvano, in che maniera fondano l'uno con l'altro, e la frequenza di questi eventi. E' stato ipotizzato che i sistemi buchi neri binari incrementino l'attività delle AGN innescando *starburst activity* e anche formare delle nubi di gas molecolari toroidali. Si pensa anche che i sistemi binari di buchi neri possano servire a spiegare le differenze tra le varie classi di AGN *radio-loud*. Infatti nelle AGN *radio-loud*, il disallineamento tra la direzione del jet radio e i dischi, può essere viene spiegato con una precedente fusione di buchi neri in queste galassie. Future osservazioni potranno fornire indicazioni sui tassi di fusione e sulle masse dei buchi neri. Le onde gravitazionali potranno essere usate come candele standard cosmologiche, assumendo di poter studiare le controparti ottiche. Si è detto che i sistemi di buchi neri binari si formino nel corso della fusione tra due galassie: questo evento si può riassumere in tre fasi diverse. Nella prima, i nuclei delle galassie in fusione si avvicinano tantissimo per cui avviene un attrito dinamico. Nella terza fase c'è l'effettiva fusione di buchi neri e l'emissione di onde gravitazionali. Quello che avviene nella fase intermedia non è ancora chiaro, perché non si sa quanto i buchi neri si avvicinino, con quale velocità e quando l'emissione di onde gravitazionali diventi significativa. Sono stati proposti dei processi che potrebbero portare ad un irrobustimento del buco nero, il movimento del buco nero, l'interazione di esso con i gas circostanti e il disco. Si suppone che i buchi neri stiano a una distanza di  $0.01 - 1$  pc per un tempo molto lungo, dato che calcoli teorici mostrano che questi meccanismi, in alcuni casi, non sempre agiscono con sufficiente forza. Alcuni ragionamenti portano a dire che la maggior parte dei sistemi binari di buchi neri si fondano in un tempo minore di quello di Hubble, che vale  $t_H \approx 10^{10} h^{-1}$  anni, considerando che la costante di Hubble abbia il seguente valore:  $H_0 = 50$  km/s/Mpc. Haehnelt e Kauffman ritengono che, se il sistema binario sopravvivesse abbastanza a lungo a piccole distanze, uno di essi potrebbe essere eiettato e quindi questo spiegherebbe l'esistenza di galassie senza buchi neri nel loro centro che va in contrasto con le osservazioni che dicono che la maggior parte delle galassie hanno un buco nero supermassivo. La maggior parte delle prove che riguardano l'esistenza di sistemi di buchi neri

binari riguardano buchi neri attivi cioè segnalati dalla presenza di jet radio, o emissione di raggi X o righe di emissione tipiche delle Seyfert.

La presenza di un sistema binario di buchi neri è stata utilizzata per spiegare le varie forme di attività delle galassie; infatti Taniguchi e Wada hanno ipotizzato che il sistema binario di buchi neri formatosi nel corso di una grossa fusione possa scatenare starburst activity vicino al nucleo, mentre quelli formati nel corso di fusioni minori porterebbero alla formazione di nuclei hot-spot.

Zier e Bierman hanno proposto che l'influenza del sistema binario di buchi neri sulla distribuzione stellare, portasse alla creazione di strutture toroidali di gas molecolari, che, si crede, siano sempre presenti nelle AGN.

Villata e Raiteri ipotizzarono che tutte le Blazar debbano le loro origini ad un sistema di buchi neri binario e che le varie classi di AGN siano in realtà una sequenza evolutiva, in cui gli oggetti BL Lac e FRI (oggetti in cui sono solitamente assenti gli hot spot, la brillantezza diminuisce dall'interno all'esterno e le dimensioni sono normalmente minori di quelle delle galassie ospiti) rappresentano lo stadio avanzato in cui i buchi neri sono molto vicini e il disco di accrescimento cresce lentamente, mentre invece le galassie FRII (radiosorgenti che usualmente presentano hot spot, hanno il massimo della brillantezza nella zona dei lobi maggiormente distante dal nucleo e dimensioni che di regola superano quelle delle galassie ospiti) ospitano coppie ancora distanti con periodi orbitali molto lunghi. Wilson e Colbert hanno ipotizzato la differenza tra AGN *radio-loud* e *radio-quiet* nasce dal fatto che le galassie ellittiche ospitano buchi neri rotanti, come risultato della fusione di due buchi neri, mentre invece le seconde sono galassie a spirale e non hanno buchi neri rotanti. Nelle galassie *radio-loud* il jet è più potente proprio perché è alimentato dallo spin dei buchi neri.

Oltre alla potenza del jet, si valuta anche qual è la sua direzione per capire da che tipo di strutture provenga. In alcune radio galassie sono presenti dei jet la cui direzione ha degli improvvisi mutamenti: si formano strutture a forma di X, che sono dette galassie a forma di X. Si conoscono circa 15 radio sorgenti di questo tipo, e la maggior parte di queste sono associate a sorgenti tipo FRII a bassa luminosità, e le galassie ospiti in genere hanno valori dell'eccentricità molto elevati. Nessuna di queste galassie presenta attività ottica Quasar con righe di emissione larghe. Alcune di queste hanno una galassia compagna e in

una, la 3C293, sono evidenti i segni dell'interazione tra esse. Nelle radio galassie a forma di S invece le variazioni nella direzione del jet sono meno improvvise e questo viene ricondotto agli effetti delle precessione.

Secondo Merrit & Ekers, e Zier & Biermann la forma a X dipende dal fatto che il buco nero rotante cambia l'orientazione dell'asse di spin per effetto della fusione con l'altro buco nero, fatto confermato anche da Dennerhøj-Thorpe et al., pur considerando fusioni minori.

È stato ipotizzato anche che le *double-double radio galaxies* siano il residuo di sistemi binari di buchi neri fusi. Queste sorgenti mostrano una struttura con doppi lobi radio simmetrici allineati lungo lo stesso asse. I lobi radio interni ed esterni hanno un centro comune e non c'è emissione radio tra il lobo interno ed esterno: si pensa che questo sia dovuto ad una sorta di interruzione della formazione del jet e una successiva ripresa: la scala temporale di questa interruzione è circa 1 Myr. Per spiegare questo fenomeno è stata ipotizzata per questi sistemi, da Liu et al., la presenza di buchi neri già fusi in cui il buco nero secondario si muove a spirale e assorbe la parte interna del disco di accrescimento del buco nero primario interrompendo così la formazione del jet. L'attività del jet riprende quando le parti esterne del disco di accrescimento riempiono nuovamente le parti interne.

Un altro fenomeno che viene spiegato con la presenza di buchi neri binari è il fatto che il jet non compia un percorso coincidente con quello di una linea retta. Alcune sorgenti infatti hanno jet con forme elicoidali o comunque con delle curvature. Tutte le osservazioni possono essere spiegate con la presenza di sistemi binari buchi neri, considerando il moto orbitale del buco nero mentre emette il jet, o gli effetti della precessione.

Un altro fenomeno periodico attribuito alla presenza di un sistema binario di buchi neri è il mutamento semi-periodico nelle curve di luce. In particolare l'oggetto BL Lac OJ 287 mostra questa variabilità con un periodo abbastanza preciso che è di circa 12 anni. Per spiegare questa variabilità ci sono due proposte: la prima riguarda il fatto che la variazione della luminosità è correlata al disco di accrescimento: Sillanpää et al., hanno ipotizzato che quando il buco nero secondario si avvicina molto al disco di accrescimento del primario, si crea una perturbazione dovuta agli effettivi mareali e quindi si crea un picco nella curva di luce. La seconda proposta spiega che la variabilità è collegata al jet, e



l'intensità è modulata dal *boosting-Döppler*. Katz et al. infatti hanno costruito un modello secondo cui la precessione del disco di accrescimento di uno dei buchi neri, causata dalla forza gravitazionale dovuta alla presenza della massa dell'altro buco nero, fa cambiare l'asse di rotazione e quindi causa il fatto che il jet si muova velocemente e in maniera periodica attraverso la linea di vista e questo conduce appunto ad una modulazione dell'intensità della luce causata proprio dal *boosting-Döppler*. Per OJ287 sono state combinate le osservazioni ottiche e radio e Valtaoja et al. hanno spiegato la variabilità nella curva di luce ipotizzando che il primo picco ottico è dovuto ad un flare che avviene quando il buco nero secondario si tuffa nel disco di accrescimento del buco nero primario. Dopo questo primo picco ottico, avvenuto nel 1983.0, l'anno successivo, 1984.2, è stato visto un secondo picco, stavolta accompagnato da una emissione radio più intensa. Il secondo picco è attribuito alla perturbazione mareale esercitata dal buco nero secondario quando si avvicina al disco di accrescimento del primario. Il periodo di circa 12 anni corrisponderebbe allora al periodo orbitale del sistema binario di buchi neri. Il prossimo massimo d'intensità è previsto per marzo 2006.

Questa variabilità ottica, con aspetti di periodicità, è stata osservata in altre Blazar, come PKS 1510-089, AO 0235+16, i cui periodi sono dell'ordine dei giorni e degli anni, fra cui, in particolare, Mkn 501, per cui è stato trovato un periodo di circa 23 giorni alle energie dei TeV. In quasi tutti questi oggetti la variabilità nella curva di luce è stata fatta risalire al sistema binario di buchi neri, ma sono stati usati differenti modelli per spiegarlo. Rieger e Mannheim hanno proposto che la modulazione del flusso di Mkn 501 cresce secondo il fattore Döppler che varia perché varia l'angolo di inclinazione di una struttura in movimento nel jet, dovuto al moto orbitale del buco nero secondario intorno al primo. Il moto orbitale dei buchi neri può essere valutato osservando i suoi effetti nei profili delle righe di emissione. Molte AGN presentano dei profili con righe di emissione con doppio picco, che vengono interpretati come prova dell'esistenza di 2 zone distinte, dette BLR, che indicano la presenza di due buchi neri nel centro di altrettante galassie.

Questo tipo di profilo però non varia nel tempo e questo non coincide con la presenza del sistema binario di buchi neri, infatti questa interpretazione fu abbandonata, salvo poi ritornarci quando ci si rese conto che la variabilità potrebbe avvenire in milioni di anni, dato che Yu mostrò che la scala temporale

orbitale di questi sistemi con BLR negli AGN può andare da circa 100 a 1000 anni, e quindi non essere stata osservata per il fatto che le osservazioni sono state effettuate per un tempo molto più breve. È anche vero che i profili a doppio picco possono dipendere da altri fattori, non legati alla presenza di BBH.

Fino adesso sono stati discussi sistemi di buchi neri binari molto stretti ma ovviamente ci si aspetta che esistano coppie che abbiano una separazione maggiore e che quindi possano essere individuati separatamente. L'unico sistema binario con componenti risolte è stata scoperta dall'osservatorio Chandra ai raggi X nella galassia infrarossa ultraluminosa (ULIRG) NGC6240. Si pensa che NGC6240 sia il risultato della fusione di due galassie e ci si aspetta che evolva verso una galassia ellittica che contenga due nuclei ottici. NGC6240 contiene due nuclei ottici non attivi, che emettono raggi X e ospitano un buco nero supermassivo in accrescimento. Questi nuclei mostrano spettri ai raggi X molto simili, sono piatti, quindi molto assorbiti, e in ciascuno di essi è presente una linea di ferro neutro a bassa ionizzazione. Questi tipi di spettri sono stati osservati solo nelle AGN. La separazione proiettata di questi nuclei ai raggi X è di 1.5 arcsec che corrisponde ad una separazione effettiva di 1.4 kpc. Ci si aspetta che questi buchi neri si fondano l'uno con l'altro nell'arco di centinaia di milioni di anni.

In alcuni casi sono state osservate Quasar ad alto redshift accompagnate da un secondo Quasar. Queste potrebbero essere vere coppie oppure allineamenti casuali, oppure anche lenti gravitazionali. La maggior parte delle osservazioni riguardano questa terza ipotesi. Le coppie con separazione  $3'' - 10''$  sembra siano per la maggior parte sistemi di Quasar binari: la distinzione tra una coppia reale e tra una coppia non reale viene seguita tenendo conto che effettivamente venga trovata la lente e se gli spettri dei due Quasar differiscano significativamente, per esempio un potrebbe essere *radio-loud* e l'altro *radio-quiet*. Ci sono varie coppie di Quasar identificate come vere: quella conosciuta con la separazione più piccola è LBQS0103-2753 con redshift  $z = 0.848$ . La sua separazione proiettata è circa  $0.3''$  corrisponde a 2.5 kpc, ma ci sono delle ambiguità, perché i mutamenti delle linee di emissione in entrambi gli spettri sembrano indicare una separazione molto più grande. È interessante notare che a parte questa, non ci sono altre coppie con piccole separazioni, infatti si trovano tutte con separazioni tra i  $3''$  e i  $10''$ . In questi casi non si può dire se le galassie ospiti siano

interagenti o se comunque ci possa essere un processo di fusione. A basso redshift si può valutare la distorsione morfologica e cinematica delle galassie ospitanti, ma essendo la maggior parte di Quasar binari a redshift alto ( $z \approx 1 - 2$ ) non si può dire nulla anche perché in alcuni casi le galassie ospiti non sono state neanche rivelate. Se due galassie ospitanti Quasar interagiscono l'una con l'altra, è probabile che questo porti a un'attivazione dell'interazione tra Quasar stessi. Mortlock et al. hanno calcolato che l'attrito dinamico avrebbe condotto i Quasar uno più vicino all'altro in tempi in paragonabili a quello di Hubble, ma la scala temporale è molto superiore al tempo tipico di attività di un Quasar è più piccolo, quindi le coppie più vicine potrebbero essere già oltre la fase di Quasar e perciò non facili da scoprire.

Nel raggruppamento di galassie Abell 400 è stata trovata una sorgente radio 3C 75 che mostra due coppie di jet radio e fu considerata come una singola galassia con due nuclei. Le osservazioni ottiche seguenti mostrarono che in realtà sono due galassie ellittiche, con ognuna all'interno un nucleo che emetteva un jet radio. Questo tipo di sistema è inusuale ed è difficile stabilire se le galassie stiano interagendo o se stiano fondendo: questo problema fu risolto esaminando le isofote e la cinematica delle galassie. Le asimmetrie delle isofote e le code di materiale dovute agli effetti mareali per esempio, indicano uno stadio di fusione. Nel sistema 3C 75 non sono state trovate queste distorsioni nelle isofote interne, però le isofote esterne non sono concentriche e ciò dimostra che le due galassie non sono legate l'una con l'altra, anche che comunque interagiscono tra loro. Bisogna considerare però che la presenza di polvere potrebbe spiegare la non concentricità delle isofote. Siccome le curvature dei jet provenienti dalle due galassie sono simili, cioè sembra che abbiano attraversato regioni simili dell'ICM, si pensa che le due galassie non siano molto distanti tra loro e perciò ci si aspetta che prima o poi fondano, essendo vicine al centro del cluster.

Ci sono dunque parecchie prove a favore dell'esistenza di buchi neri binari supermassivi nei centri delle galassie. Poiché la maggior parte dei buchi neri facenti parte di un sistema binario stanno tra loro a distanza di circa  $0.01 - 10$  pc, la loro presenza è evidenziata dall'esistenza di fenomeni periodici, come la variazione nella curve di luce e il *wiggling radio jets*. Per quanto riguarda coppie più distanti fra loro, potenzialmente risolvibili, bisogna dire che queste sono più difficilmente riconoscibili, a meno che entrambi i buchi neri non siano attivi. La

coppia con la separazione fisica (circa 1.5 Kpc) più piccola conosciuta al centro di una singola galassia, e l'unica al centro, è quella situata in NGC 6240, visibile ai raggi X. Le altre coppie sono conosciute sotto forma di galassie binarie con i nuclei attivi, come per esempio quelle che costituiscono la sorgente radio 3C 75, e qualcuna di queste potrebbe aver già cominciato la fusione. Sono stati proposti dei modelli che danno un'idea di ciò che potrebbe presentarsi dopo la fusione: una fusione minore porterebbe alla creazione di una radio galassia a forma di X, in cui avverrebbe lo spin-flip nel buco nero, con la conseguente variazione della direzione del jet. Secondo Merrit e Ekers ci sarebbe circa un evento all'anno di questo tipo, che sarebbe possibile studiare attraverso un interferometro ad onde gravitazionali.

Ancora però non è certo quale sia il fenomeno prevalente all'interno della struttura del sistema binario, cioè se prevalga l'effetto del moto orbitale o l'effetto della precessione: perciò si hanno grandi incertezze sulla stima precisa delle masse dei buchi neri, il cui range va da  $10^6$  a  $10^{10} M_{\odot}$ .

Le ricerche future mireranno a studiare i sistemi binari attivi ai raggi X al centro di ULIRG, usando Chandra, a studiare galassie con HST che ospitano coppie di Quasar ad alto redshift, ad avere immagini radio di galassie radio ad alta risoluzione a forma di X per cercare di valutare un'eventuale interruzione dell'emissione radio tra il nucleo e i bracci, e a osservare i Blazar a varie lunghezze d'onda e valutare un'eventuale variabilità periodica, come si cercherà di fare nel marzo 2006 con OJ 287, data in cui ci si aspetta un suo massimo di visibilità.

## 1.6 L'origine dello spettro degli AGN

Come è stato già anticipato, si pensa che al centro degli AGN sia presente un buco nero e che ci sia trasferimento di massa verso di esso, attraverso un disco di accrescimento. Questo trasferimento comporta anche un trasferimento di momento angolare, che comporta la trasformazione di un qualsiasi buco nero di Schwarzschild in un buco nero di Kerr, ossia un buco nero rotante. Essendo:

$$J_{\max} = \frac{GM^2}{c} \quad (1.18)$$

il momento angolare di un buco nero di Kerr in stato di massima rotazione,

quando la massa di un buco nero cresce a seguito dell'apporto di materia attraverso un disco di accrescimento, inglobando contemporaneamente parte della radiazione emessa dal disco, il momento angolare si stabilizza sul valore

$$J = 0.998J_{\max} \quad (1.19)$$

I buchi neri che possiedono un momento angolare pari a questo valore vengono detti buchi neri canonici di Kerr, e si pensa che nel nucleo degli AGN sia presente questo tipo di buchi neri. Per quanto riguarda i dischi di accrescimento, una grandezza fondamentale da considerare è il momento angolare. Si dovrebbe fare un discorso relativistico, ma qualitativamente sono valide anche le conclusioni a cui si giunge utilizzando l'approssimazione newtoniana e le orbite circolari. In tal caso le velocità orbitali sono date da:

$$v = \left( \frac{GM}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.20)$$

dove con  $M$  si indica la massa del buco nero e  $R$  il raggio dell'orbita. Il momento della quantità di moto per unità di massa risulta essere:

$$\frac{dJ}{dm} = vR = (GMR)^{1/2} \quad (1.21)$$

che diminuisce al diminuire del raggio dell'orbita. Nei dischi di accrescimento classici si pensa che il momento angolare in eccesso venga trasferito verso la parte esterna del disco, da cui poi può essere trasferito al momento angolare totale della binaria. Nel caso dei dischi attorno ai nuclei galattici attivi si può ancora pensare un suo trasferimento verso l'esterno, ma non è chiaro dove esso poi possa essere depositato, e questo resta un problema aperto.

### 1.6.1 Temperatura e spettro della radiazione provenienti da un disco

L'ipotesi di partenza è che la frazione dell'energia fornita dalla discesa della materia nel campo gravitazionale dell'oggetto centrale che non va ad incrementare l'energia cinetica orbitale delle particelle, e che non è associata al momento angolare che viene trasferita altrove, venga irraggiata localmente. Per il momento non si considera quello che è il problema del momento angolare e considerando il caso di un disco newtoniano in condizioni stazionarie, detta  $\Sigma$

la sua densità superficiale ,  $v_R$  la velocità radiale della materia nella sua discesa verso il centro ad l'afflusso di massa per unità di tempo, si avrà:

$$\dot{m} = 2\pi R\Sigma v_R \quad (1.22)$$

da cui:

$$\Sigma = \frac{\dot{m}}{2\pi R v_R} \quad (1.23)$$

La materia compresa in una corona circolare di raggio  $R$  e spessore  $dR$  sarà quindi:

$$dm = \Sigma 2\pi R dR = \frac{\dot{m}}{2\pi R v_R} 2\pi R dR = \frac{\dot{m}}{v_R} dR \quad (1.24)$$

Il lavoro compiuto dalla forza di gravità,  $GMdm/R^2$ , relativo alla discesa  $dR = v_R dt$  nel campo dell'oggetto centrale, sarà quindi dato da:

$$dE = F dR = \frac{GMdm}{R^2} v_R dt = \frac{GM}{R^2} \frac{\dot{m}}{v_R} dR v_R dt = \frac{GM}{R^2} \dot{m} dR dt \quad (1.25)$$

Metà di questo lavoro resterà accumulato nella materia come energia cinetica associata al moto orbitale, metà verrà invece irraggiato come calore. Si ottiene perciò:

$$dL = \frac{1}{2} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{GM}{R^2} \dot{m} dR \quad (1.26)$$

Se il momento angolare in eccesso viene trasportato per viscosità verso la parte esterna del disco questa espressione viene modificata in quanto l'energia disponibile nelle parti più esterne risulta tre volte maggiore di quella che abbiamo considerato. Dato però che la luminosità della parte esterna resta sempre molto piccola rispetto a quella della parte più interna, l'irraggiamento della parte interna non risulta sostanzialmente modificato. Integrando la eq: 1.26 si ottiene:

$$L(R_1, R_2) = -\frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{GM}{R^2} \dot{m} dR = \frac{1}{2} GM \dot{m} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] \quad (1.27)$$

Ponendo  $R_1 = 5/8 R_S$ , che indica l'ultima orbita stabile corotante per un buco nero canonico di Kerr,  $R_2 = \infty$  e ricordando l'espressione del raggio di Schwarzschild, si ottiene la luminosità del disco, che risulta essere:

$$L_T = \frac{4}{5} \frac{GM\dot{m}}{R_S} = 0.4\dot{m}c^2 \quad (1.28)$$

In questo caso la resa energetica è del 40%, mentre i calcoli relativistici portano ad un 31%.

Perché metà dell'energia resa disponibile tra  $R$  ed  $R + dR$  possa essere irradiata come calore dalla superficie della corona circolare compresa tra questi raggi, se  $T$  è la temperatura del disco, che supporremo otticamente spesso, ricordando che esso ha due facce, dovrà essere:

$$\frac{1}{2} \frac{GM\dot{m}}{R^2} dR = 4\pi R dR \sigma T^4 \quad (1.29)$$

da cui:

$$T = \left( \frac{GM\dot{m}}{8\pi\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} R^{-3/4} \quad (1.30)$$

Se si introduce il valore del raggio di Schwarzschild, si può riscrivere questa espressione nel seguente modo:

$$\begin{aligned} T &= \left( \frac{GM\dot{m}}{8\pi\sigma R_S^3} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{R}{R_S} \right)^{-\frac{3}{4}} = \left( \frac{c^6}{64\pi\sigma G^2} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\dot{m}}{M^2} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{R}{R_S} \right)^{-\frac{3}{4}} \\ &= 6.1 \times 10^{19} \left( \frac{\dot{m}}{M^2} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{R}{R_S} \right)^{-\frac{3}{4}} \text{ K} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Se si attribuisce la struttura spettrale nota come big blue bump all'emissione del disco di accrescimento, dato che la sua posizione nello spettro risulta sostanzialmente indipendente dalle luminosità degli oggetti, si deve ammettere che la distribuzione di temperatura nei dischi di accrescimento degli AGN debba essere la stessa a tutte le luminosità. Dato poi che la luminosità, a parità di altre condizioni, risultano proporzionali al rate di afflusso di massa, si vede immediatamente dalla eq. 1.31 che le distribuzioni di temperatura possono risultare indipendenti dalle luminosità solo se:

$$L \propto \dot{m} \propto M^2 \quad (1.32)$$

Questa relazione può sussistere solo se le masse degli oggetti centrali sono in qualche modo in grado di controllare i tassi di accrescimento. L'esistenza di una

correlazione abbastanza stretta tra luminosità e masse risulta evidente anche dai pochi dati oggi disponibili ed appare compatibile con la proporzionalità tra luminosità e quadrati delle masse suggerita dalla eq. 1.32.



## Capitolo 2

# La teoria della relatività generale e le onde gravitazionali

### 2.1 La meccanica newtoniana e la sua invarianza rispetto alle trasformazioni di Galileo

Le leggi che governano la meccanica newtoniana sono ben codificate nei tre principi di inerzia:

- 1) Ogni corpo non soggetto a forze esterne mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme
- 2) Un corpo soggetto ad una forza esterna subisce un'accelerazione che dipende dalla forza applicata e dalla massa del corpo secondo la relazione  $\vec{a} = \vec{F}/m$
- 3) Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

Un osservatore  $O$  nel cui sistema di riferimento sono validi i tre principi della meccanica è detto *osservatore inerziale* ed il suo sistema di riferimento è detto *sistema di riferimento inerziale*. Consideriamo ora un secondo osservatore  $O'$  che, come l'osservatore  $O$ , sta osservando il moto di un punto  $P$ . L'osservatore  $O$  descrive la posizione di  $P$  con un vettore  $X(t)$ , mentre l'osservatore  $O'$  individua la posizione del punto  $P$  con un il vettore  $X'(t)$ . La relazione che permette di esprimere il vettore  $X'(t)$  rispetto al vettore  $X(t)$  coinvolge il vettore  $X_R(t)$  che descrive la posizione di  $O'$  rispetto ad  $O$ :

$$\vec{X}'(t) = \vec{X}(t) - \vec{X}_R(t) \quad (2.1)$$

Derivando rispetto al tempo la eq.2.1 è possibile trovare la relazione che lega le velocità misurate dai due osservatori:

$$\vec{V}'(t) = \vec{V}(t) - \vec{V}_R(t) \quad (2.2)$$

in cui  $\vec{V}_R(t)$  è la velocità dell'osservatore  $O'$  rispetto ad  $O$ . L'eq.2.2 mostra immediatamente che se i due osservatori sono in quiete l'uno rispetto all'altro essi, in ogni istante, attribuiscono al punto  $P$  la medesima velocità. Derivando ulteriormente rispetto al tempo, si ottiene una relazione tra le accelerazioni misurate dai due osservatori:

$$\vec{A}'(t) = \vec{A}(t) - \vec{A}_R(t) \quad (2.3)$$

in cui ora il termine  $\vec{A}_R(t)$  descrive l'accelerazione subita dall'osservatore  $O'$  rispetto all'osservatore  $O$ . L'equazione 2.3 indica che, se l'osservatore  $O'$  si muove con accelerazione nulla rispetto ad  $O$ , cioè si muove di moto rettilineo uniforme, allora ad ogni istante  $O'$  misura per il punto  $P$  la medesima accelerazione misurata da  $O$ , e la 2.3 diventa:

$$\vec{A}'(t) = \vec{A}(t) \quad (2.4)$$

La relazione 2.4 ha in realtà un significato più ampio. Se infatti un osservatore  $O'$  si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad un osservatore inerziale  $O$ , allora anche  $O'$  è un osservatore inerziale, quindi nel suo sistema di riferimento valgono ancora le leggi della meccanica. Nel caso in cui sia valida la relazione 2.4, la relazione 2.2 assume la seguente forma:

$$\vec{X}'(t) = \vec{X}(t) - \vec{V}_R t \quad (2.5)$$

in cui  $\vec{V}_R$  è ancora a velocità relativa di  $O'$  rispetto ad  $O$ , però costante. Le tre relazioni descritte in forma vettoriale dalla relazione 2.5 prendono il nome di trasformazioni di Galileo. Abbiamo quindi trovato una classe di sistemi di riferimento, i sistemi di riferimento inerziali, ed una classe di trasformazioni di coordinate tra sistemi inerziali, le trasformazioni di Galileo, che mantengono inalterate le leggi della meccanica. Queste considerazioni sono alla base dell'affermazione:

*Le leggi della meccanica sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo.*

## 2.2 Le leggi dell'elettromagnetismo e la crisi della meccanica newtoniana.

Il XIX secolo è stato testimone di una forte ricerca sui fenomeni elettrici e magnetici. Il contributo più importante è dovuto a Maxwell, il quale ha ripreso i quattro fenomeni fondamentali (descritti dal teorema di Gauss per il campo elettrostatico, dal teorema sul flusso del campo di induzione magnetica, dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz sull'induzione elettrica e dal teorema della circuitazione di Ampere), ha riscritto le relative relazioni matematiche sotto forma di equazioni differenziali ed ha infine mostrato che tali equazioni differenziali sono le **equazioni di campo** per il campo elettromagnetico. Analogamente a quanto fatto per la meccanica, ci si è posti il problema dell'invarianza delle leggi dell'elettromagnetismo. Con grande sgomento e preoccupazione è emerso che le leggi di Maxwell **NON SONO INVARIANTI** rispetto alle trasformazioni di Galileo. La non invarianza delle leggi di Maxwell ha messo in dubbio, da un lato, la validità delle leggi stesse dell'elettromagnetismo e, dall'altro, ha stimolato la ricerca delle leggi di trasformazione di coordinate che mantengono invarianti le equazioni di Maxwell. Quest'ultimo aspetto è stato risolto in breve tempo da Lorentz, seppur dal solo punto di vista matematico. Il suo approccio è stato il seguente: le incognite delle equazioni di Maxwell, i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono funzioni delle 4 variabili  $x, y, z, t$ . Egli ha pertanto cercato quattro relazioni della forma:

$$\begin{aligned}x' &= x'(x, y, z, t) \\y' &= y'(x, y, z, t) \\z' &= z'(x, y, z, t) \\t' &= t'(x, y, z, t)\end{aligned}\tag{2.6}$$

Dal punto di vista matematico tutto funziona perfettamente, dal punto di vista fisico no, dato che la variabile  $t$  rappresenta un intervallo temporale tra due eventi e tutte le evidenze sperimentali passate erano ben descritte dall'assunzione di un tempo assoluto. Al contrario, la relazione  $t' = t'(x, y, z, t)$  è una legge di trasformazione tra il tempo  $t$  misurato dall'osservatore  $O$  ed il tempo  $t'$ , misurato dall'osservatore  $O'$  diverso da  $t$ : la validità di questa relazione contraddirebbe quindi l'assunzione di un unico tempo assoluto. Quindi le trasformazioni di Lorentz, sebbene perfettamente in grado di mantenere

invarianti le equazioni di Maxwell dal punto di vista matematico, implicavano grosse difficoltà per la loro interpretazione fisica. Nello stesso periodo furono raggiunti due fondamentali risultati in ottica. Il primo risultato riguarda la velocità della luce, o meglio, l'evidenza sperimentale della propagazione della luce con velocità finita. Il secondo risultato, o meglio non-risultato, lo ottenne Michelson con il suo famoso esperimento per evidenziare il cosiddetto trascinarsi dell'etere, esperimento che non fornì alcuna conferma di tale scenario. L'esperimento di Michelson si basava, tra le altre cose, sull'assunzione che anche per la luce fossero valide le leggi di trasformazione di Galileo.

### 2.3 La relatività ristretta

Nel 1905 un giovane impiegato dell'ufficio brevetti di Zurigo pubblica tre lavori, che sarebbe meglio chiamare miracoli scientifici. In uno di questi il Sig. Albert Einstein formula una nuova teoria che, tra le altre cose, spiega dal punto di vista fisico sia il problema dell'invarianza delle equazioni di Maxwell rispetto alle trasformazioni di Lorentz e non quelle di Galileo, sia l'insuccesso dell'esperimento di Michelson. Inoltre questa nuova teoria è in grado di preservare l'invarianza delle leggi della meccanica rispetto alle medesime trasformazioni che lasciano invariate le leggi dell'elettromagnetismo. Stiamo parlando della teoria della **relatività ristretta**. La teoria della relatività ristretta si basa su due soli postulati. Il primo, l'equivalenza dei sistemi inerziali, era perfettamente accettabile dal punto di vista della meccanica newtoniana. Il secondo, invece, totalmente rivoluzionario: la costanza della velocità della luce rispetto a qualsiasi osservatore.

Questo secondo postulato implica che la quantità:

$$\Delta s^2 = \Delta l^2 - c^2 \Delta t^2 \quad (2.7)$$

deve essere invariante per qualsiasi osservatore. Le due quantità  $\Delta l^2$  e  $\Delta t^2$  possono differire tra i due osservatori, ma non la loro combinazione espressa dalla relazione 2.7. Il fatto che né le lunghezze né gli intervalli di tempo siano grandezze definibili in termini assoluti, ha portato ad abbandonare i due concetti di spazio e di tempo per come erano concepiti fino a quel momento, cioè a se stanti, e ad introdurre un nuovo ambiente in cui collocare gli eventi: lo spazio-

tempo. Un evento è ora descritto nello spazio-tempo da quattro coordinate: tre spaziali ed una temporale. Einstein ha quindi riottenuto le trasformazioni di Lorentz, questa volta basandosi su principi fisici: i principi della relatività ristretta.

## 2.4 La relatività generale

Nell'ambito della relatività ristretta dato un sistema di riferimento non inerziale, è possibile trovare un nuovo sistema di riferimento legato al primo in cui valgono le leggi di inerzia. Tale trasformazione può essere, inoltre, globale, cioè può essere trovato un opportuno sistema di riferimento nel quale qualsiasi forza può essere annullata.

L'inclusione dei fenomeni gravitazionali nell'ambito della relatività ristretta non permette più questa operazione: dato un sistema di riferimento non inerziale è possibile solo localmente trovare un sistema di riferimento inerziale. Il fatto che sia possibile determinare sistemi di riferimento inerziali locali (RIL) implica che, a differenza delle altre forze, la gravità non può essere annullata globalmente.

Per risolvere questa discrepanza tra uno spazio tempo in cui non sia presente l'azione della gravità ed uno soggetto alla gravità Einstein ha adottato un approccio geometrico. La relazione 2.7 può essere considerata come una *distanza* tra due punti dello spazio tempo. Inoltre, poiché in uno spazio tempo in cui non è presente l'azione della gravità il moto di una particella libera è rettilineo uniforme, la relazione 2.7 può essere assunta come descrittiva delle proprietà geometriche di uno spazio-tempo piatto. Infatti se si restringe la 2.7 a due sole coordinate spaziali, essa non è altro che il teorema di Pitagora, la cui validità è equivalente ad affermare che la particella si sta muovendo su un piano. Questa analogia giustifica il nome di spazio tempo piatto dato ad uno spazio tempo in cui non è presente l'azione della gravità.

Nel caso in cui una particella sia in caduta libera, cioè si muova soltanto sotto l'influenza della forza di gravità, Einstein ha notato come tale particella si muova di moto rettilineo uniforme soltanto localmente, mentre globalmente il moto della medesima particella si discosta da tale uniformità. L'approccio geometrico di Einstein lo ha quindi portato ad affermare che l'effetto della gravità sullo spazio tempo consiste in un cambiamento delle proprietà

geometriche dello spazio tempo: se in uno spazio tempo piatto una particella libera si muove con velocità costante lungo linee rette, in uno spazio tempo non piatto la particella in caduta libera si muoverà lungo le medesime linee, questa volta deformate dall'effetto della gravità.

## 2.5 Le equazioni di Einstein

La relazione 2.7, come precedentemente affermato, descrive la distanza nello spazio tempo tra due punti. Essa è il caso particolare della seguente relazione:

$$ds^2 = dX^T \cdot g \cdot dX \quad (2.8)$$

dove  $dX = (dt, dx, dy, dz)$  è un vettore infinitesimo nello spazio delle coordinate e  $g$  è una matrice simmetrica 4x4 dipendente dalle coordinate, ed è chiamato tensore metrico. L'equazione 2.7 può essere ottenuta dalla 2.8 nel caso in cui la matrice  $g$  assume l'espressione:

$$g = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

La matrice indicata nell'espressione 2.9 è chiamata matrice di Minkowski o, equivalentemente, *metrica di Minkowski*. Rispetto ad un generico sistema di coordinate, l'espressione esplicita dell'intervallo spazio-temporale è dunque una somma di termini come  $\Delta x^2$ ,  $\Delta t^2$ ,  $\Delta x \Delta t$ , con coefficienti che dipendono dalle quattro coordinate, ovvero variano nello spazio e nel tempo. Se il sistema di coordinate è costruito come estensione di un sistema locale liberamente gravitante, tali coefficienti si riducono a quelli della 2.9 solo nel punto spaziale occupato dal corpo in caduta libera.

La determinazione, a partire da un'assegnata distribuzione di materia, del tensore metrico costituisce il punto fondamentale della teoria della gravitazione.

Il problema è formalmente risolto dalle equazioni di Einstein<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Le grandezze che presentano gli indici  $\mu$  e  $\nu$  sono elementi di matrici  $4 \times 4$ . La 2.10 rappresenta dunque 16 equazioni, delle quali solo 10 sono indipendenti, dal momento che le matrici in gioco sono simmetriche. La notazione tensoriale  $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  è un'abbreviazione di

$$\sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

Esse legano la densità di massa, attraverso il tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ , ad un particolare insieme di funzioni non lineari del tensore metrico e delle sue derivate prime e seconde, spaziali e temporali: il tensore di Ricci  $R_{\mu\nu}$  e lo scalare di Ricci  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ . Il tensore di Ricci è noto anche come tensore di curvatura, perché nelle varietà bidimensionali lo scalare di Ricci risulta essere numericamente uguale all'inverso del raggio di curvatura locale mentre, negli ordinari spazi euclidei, esso è ovunque nullo. Da qui nasce l'immagine secondo la quale la presenza di materia determinerebbe un incurvamento dello spazio-tempo.

La costante  $G$  è la costante di gravitazione universale di Newton, come si può dedurre dall'analisi dell'equazione nelle condizioni in cui la concezione newtoniana della meccanica torna ad essere valida, ovvero nei limiti dei campi gravitazionali deboli. In questo limite, infatti, si può ottenere dalla 2.10 l'equazione classica per il potenziale gravitazionale newtoniano  $\phi$ :

$$\nabla^2\phi = -4\pi G\rho \quad (2.11)$$

dove  $\nabla^2$  indica l'operatore di Laplace e  $\rho$  è la densità di massa della sorgente.

Seguendo ancora l'approccio geometrico nella descrizione di un campo gravitazionale, il moto di una particella segue le linee in caduta libera sono curve definite dalle proprietà geometriche dello spazio-tempo: le *geodetiche*, cioè le linee geometriche dello spazio-tempo di minima lunghezza spazio-temporale che congiungono due eventi assegnati. Per esempio, in uno spazio euclideo le geodetiche sono linee rette, in una sfera gli archi di cerchio massimo. Pertanto si può dire che i corpi in caduta libera seguono traiettorie curve per assecondare il 'profilo incurvato' dello spazio-tempo. Per i pianeti immersi nel campo gravitazionale del nostro Sole sono le rispettive traiettorie nelle spazio-tempo quadridimensionale, eccetera).

L'equazione che descrive queste curve è la naturale generalizzazione ad uno

---

spazio generico dell'equazione del moto in assenza di forza, cioè la condizione di annullamento dell'accelerazione.

## 2.6 Strumenti matematici per studiare la relatività generale

Con il termine “strumenti matematici” si intendono quelle funzioni, in genere tensori, che contengono informazioni sul tensore metrico tramite le sue derivate. Lo strumento fondamentale è il tensore di Riemann,  $R^i_{klm}$ , che da informazioni sulla curvatura dello spazio tempo. È definito a partire dai coefficienti di connessione o simboli di Christoffel che a loro volta sono combinazioni delle derivate del tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ , chiamato anche tensore fondamentale, perché descrive direttamente la geometria dello spazio tempo.

L'espressione del tensore di Riemann e dei coefficienti di connessione sono le seguenti:

$$R^i_{klm} \equiv \frac{d\Gamma^i_{km}}{dx^l} - \frac{d\Gamma^i_{kl}}{dx^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl} \quad (2.12)$$

$$\Gamma^i_{kl} \equiv \frac{1}{2}g^{im} \left[ \frac{dg_{mk}}{dx^l} + \frac{dg_m}{dx^k} - \frac{dg_{lk}}{dx^m} \right] \quad (2.13)$$

Le connessioni non sono delle grandezze tensoriali, infatti in un sistema di riferimento inerziale locale (RIL) sono tutte nulle. Questo è legato al principio di equivalenza ed al fatto che in un singolo punti posso sempre annullare il campo gravitazionale.

Riguardo a quanto è stato detto prima sulla meccanica classica, si può fare un parallelo: le connessioni rappresentano il campo, mentre i coefficienti della metrica il potenziale.

Un secondo strumento utile è il tensore di Ricci, simmetrico, che si ottiene dal tensore di Riemann per contrazione dell'indice controvariante con l'indice covariante centrale:  $R_{ik} = R^j_{ijk}$ .

Con  $R$  si indica la sua traccia, che è anche detta curvatura scalare, e viene usata per definire il tensore di Einstein:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R \quad (2.14)$$



e anch'esso risulta simmetrico.

La connessione tra il tensore di Riemann ed il tensore energia-impulso può dunque essere fatta solo attraverso il tensore di Einstein, postulando:

$$G_{ik} = kT_{ik} \quad (2.15)$$

dove  $k$  è una costante arbitraria.

Per il campo debole è valida l'approssimazione newtoniana, e unito all'utilizzo delle unita naturali o geometriche per cui  $c = G = h = 1$  ( $h$ : costante di Plank), si ottiene  $k = 8\pi$  e si arriva alla formula finale delle equazioni di Einstein od equazioni del campo gravitazionale:

$$G_{ik} = 8\pi T_{ik} \quad (2.16)$$

Il tensore di Einstein deve essere determinato dalla distribuzione di materia. L'oggetto che esprime la distribuzione della materia se faccio l'ipotesi di accoppiamento minimale è il tensore energia-impulso  $T_{ik}$ . È richiesto  $T_{ik}$  che abbia le seguenti proprietà:

- deve essere simmetrico
- la sua divergenza deve essere nulla

Scrivendo esplicitamente queste equazioni e, calcolando il tensore di Einstein in funzione del tensore metrico, si ottengono per le  $g_{\mu\nu}$  equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, ma fortemente non lineari: questa è la ragione fondamentale per cui la matematica della relatività generale è così complicata, e soluzioni esatte sono note solo in pochi casi, in cui è presente grande simmetria.

## 2.7 La teoria linearizzata

Supponiamo che nello spazio-tempo si possa trovare un sistema di coordinate  $\{x^i\}$  nel quale il tensore metrico differisca di poco da quello di Lorentz-Minkowsky della relatività speciale  $\eta_{ik}$ :

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik} \quad (2.17)$$

con  $|h_{ik}| \ll 1$ . Per quanto riguarda il sistema solare, questa equazione è soddisfatta quando  $|h_{ik}| \leq 10^{-6}$ .

A questo punto è possibile calcolare le connessioni, il tensore di Riemann e quello di Einstein, conservando in ogni caso solo termini di primo ordine in  $h_{ik}$  (si definisce  $h_{ij,k} \equiv \partial h_{ij}/\partial x^k$ )<sup>2</sup>:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2}\eta^{im}(h_{ml,k} + h_{mk,l} - h_{kl,m}) \quad (2.18)$$

$$R_{kln}^i = \frac{1}{2}\eta^{im}(h_{kl,n,m} + h_{nm,k,l} - h_{kn,l,m} - h_{lm,k,n}) \quad (2.19)$$

$$G_{kn} = \frac{1}{2}\eta^{lm}(h_{kl,n,m} + h_{nm,k,l} - h_{kn,l,m} - h_{lm,k,n}) \quad (2.20)$$

Dalla 2.16 si ricavano le equazioni di Einstein, che però assumono una forma molto più semplice se si fa la seguente sostituzione:

$$\bar{h}_{ik} = h_{ik} + \frac{1}{2}h\eta^{ik} \quad (2.21)$$

dove  $h = h_i^i$ . È molto semplice verificare che:

$$h_{ik} = \bar{h}_{ik} - \frac{\bar{h}}{2}\eta^{ik} \quad (2.22)$$

Con queste trasformazioni, le equazioni di Einstein diventano:

$$\eta^{lm}\bar{h}_{il,k,m} + \eta^{lm}\bar{h}_{kl,i,m} - \eta^{lm}\bar{h}_{ik,l,m} - \eta_{ik}\eta^{lm}\eta^{np}\bar{h}_{ln,m,p} = 16\pi T_{ik} \quad (2.23)$$

Il primo termine del primo membro della 2.23 è  $\square\bar{h}_{ik}$ , mentre gli altri rendono l'equazione "gauge invariante", cioè invariante per cambio di coordinate.

Nella teoria lineare infatti si possono utilizzare due diversi tipi di trasformazione di coordinate:

- una trasformazione di Lorentz che lascia invariante  $\eta_{ik}$  e trasforma  $h_{ik}$  come un normale tensore lorentziano;

---

<sup>2</sup>In tutte queste equazioni ho alzato e abbassato gli indici usando il tensore metrico lorentziano  $\eta^{ik}$  della relatività speciale.

- una trasformazione infinitesima arbitraria: questa altera il tensore metrico, cioè manda  $h_{ik}$  in un nuovo  $\bar{h}_{ik}$ , che però in termini fisici è uguale al primo.

Prendendo in considerazione il secondo tipo di trasformazione, si vede che essa appare come una trasformazione del “campo”  $h_{ik}$  che deve lasciare invarianti le equazioni, esattamente come accade nelle trasformazioni di gauge dei potenziali elettromagnetici.

Le equazioni dei potenziali elettromagnetici assumono la forma

$$\square A^\mu + A_{,\nu}^{\nu\mu} = -4\pi j^\mu \quad (2.24)$$

che è appunto gauge invariante. Sfruttando l'arbitrarietà della gauge per semplificare l'equazione, si sceglie la “gauge di Lorentz” per cui  $A_{,\nu}^\nu = 0 \dots$

$$\square A^\mu + = -4\pi j^\mu \quad (2.25)$$

Si può fare la stessa cosa con le equazioni di Einstein, e si stabilisce subito come esse siano invarianti sotto la seguente trasformazione:

$$h_{ik} \rightarrow h'_{ik} = h_{ik} + \varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{k,i} \quad (2.26)$$

che deriva della seguente trasformazione di coordinate, a meno di termini del secondo ordine nelle  $\varepsilon_i$ :

$$x^i \rightarrow x'^i = x^i - \varepsilon^i \quad (2.27)$$

Sfruttando la 2.26 impongo la condizione  $\bar{h}_{ik}^k = 0$  e perciò la 2.23 si riduce a:

$$\square \bar{h}_{ik} = 16\pi T_{ik} \quad (2.28)$$

## 2.8 La propagazione del campo gravitazionale

Un sistema interagente può essere schematicamente suddiviso in tre soggetti: la sorgente, il ricevitore e l'intermediario, o *campo d'interazione*. Un campo è una funzione dei punti dello spazio-tempo, i cui valori sono fissati dallo stato della

sorgente e determinano il comportamento meccanico del ricettore. In sintesi, un'interazione si realizza attraverso uno scambio d'informazioni tra sorgente e ricettore, mediato da un campo. Dal momento che l'interazione gravitazionale è la manifestazione delle proprietà geometriche dello spazio-tempo, è naturale l'identificazione del suo intermediario con il tensore metrico.

Lo scambio d'informazioni di cui si è parlato avviene nel rispetto del *principio di causalità*. Esso afferma che gli eventi ai quali vanno incontro i corpi sottoposti ad interazione non possono precedere gli eventi che la causano. In altre parole, i secondi devono appartenere al futuro dei primi.

Com'è noto, affinché la distanza temporale tra due eventi abbia segno definito, e si possa pertanto stabilire quale dei due è avvenuto per primo, l'intervallo spazio-temporale tra essi deve avere segno negativo, vale a dire:

$$\Delta l^2 - c^2 \Delta t^2 \leq 0 \quad \Delta t \geq \frac{\Delta l}{c} \quad (2.29)$$

In caso contrario, il segno dell'intervallo temporale dipende dal sistema di riferimento, ed i due eventi non possono essere correlati da una relazione causale.

Dalla 2.29 si deduce che la distanza temporale minima tra un evento ed un qualsiasi altro appartenente al futuro del primo cresce al crescere della loro distanza spaziale. L'interazione tra particelle materiali viene descritta in meccanica classica mediante l'energia potenziale d'interazione, la quale è una funzione delle coordinate delle particelle interagenti. È facile vedere che questo metodo di descrizione presuppone valida l'ipotesi che le interazioni si propaghino istantaneamente. Infatti, secondo questa descrizione, le forze che le altre particelle esercitano su una particella data, dipendono, in ogni istante di tempo, soltanto dalla posizione delle particelle in questo stesso istante. Il cambiamento della posizione di qualsiasi particella interagente si riflette istantaneamente sulle altre particelle. L'esperienza mostra tuttavia che non esistono nella natura interazioni istantanee. Per questa ragione, la meccanica, che parte dall'ipotesi della propagazione istantanea delle interazioni, contiene una certa imprecisione. In realtà se uno dei due corpi interagenti subisce qualche cambiamento, la ripercussione su un altro corpo del sistema si produrrà dopo un certo intervallo di tempo. Soltanto alla fine di questo intervallo di tempo il secondo corpo subirà processi dovuti a questo cambiamento. Dividendo la distanza tra i due

corpi per questo intervallo di tempo troviamo la velocità con cui le interazioni si propagano. L'interazione, che si propaga da una particella all'altra, è chiamata anche "segnale" emesso da una per "informare" l'altra del cambiamento subito. Si parla perciò di velocità di propagazione delle interazioni come della "velocità di un segnale". Dal principio di relatività segue che la velocità di propagazione delle interazioni è la stessa per tutti i sistemi inerziali di riferimento. La velocità di propagazione è quindi una costante universale, che è pari alla velocità della luce nel vuoto,  $c$ : si può affermare che il futuro di un evento si propaga nello spazio a velocità  $c$ . Ne consegue che tutti i campi intermediari di un'interazione, i quali trasmettono nel futuro l'informazione relativa allo stato della sorgente, devono possedere dei meccanismi di propagazione nello spazio a velocità finita, e questa velocità non può essere superiore alla velocità della luce.

Il caso più semplice è rappresentato dalla propagazione del campo elettromagnetico. Essa è descritta dall'equazione di D'Alambert:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (2.30)$$

dove  $\mathbf{A} = (\vec{A}, \varphi)$  è il quadrivettore che descrive i potenziali vettore e scalare, da cui derivano rispettivamente il campo magnetico ed il campo elettrico, e  $\mathbf{j} = (\vec{j}, c\rho)$  è il quadrivettore che descrive le caratteristiche della sorgente (densità di corrente e di carica elettrica). Le soluzioni causali di quest'equazione si possono scrivere nella forma dei potenziali ritardati:

$$\mathbf{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{d^3 \vec{x}'}{r} [\mathbf{j}(\vec{x}', t')]_{t-r/c} \quad (2.31)$$

dove  $r = |\vec{x}' - \vec{x}|$  è la distanza tra il punto di osservazione del potenziale e le singole cariche che compongono la sorgente, e il suffisso  $t - r/c$  indica che la variabile temporale da cui dipende  $\mathbf{j}$  deve essere uguagliata a questo valore. È dunque evidente che lo stato del campo all'istante  $t$  dipende dallo stato della sorgente all'istante  $t' = t - r/c$ , ovvero l'informazione si propaga su un fronte sferico che si espande con velocità  $c$ .

Questa caratteristica del campo elettromagnetico si manifesta in maniera molto evidente in presenza di rapide variazioni dello stato di moto delle sorgenti. È noto, infatti, che un sistema di cariche in moto a velocità costante determina

nello spazio campi elettrici e magnetici stazionari, la cui intensità decresce come l'inverso del quadrato della distanza dalle sorgenti.

Ad una variazione dello stato di moto delle sorgenti deve succedere una variazione dei campi statici circostanti. L'informazione necessaria a produrre questa variazione è trasportata, sul fronte sferico in espansione degli eventi futuri, da un ulteriore campo elettromagnetico, detto *onda elettromagnetica*. Essa si differenzia dai campi statici perché la sua intensità decresce come l'inverso della distanza dalla sorgente, pertanto si estingue molto più lentamente ed è rilevabile a distanze molto maggiori. La sua produzione coincide con il rilascio, da parte della sorgente, di una certa quantità di energia, che è trasportata dall'onda e può essere riassorbita dalla materia tramite interazione con l'onda stessa.

A differenza dell'equazione di D'Alambert, le equazioni di Einstein 2.10 sono non lineari e lo spazio che le supporta non è l'ordinario spazio piatto. Questo comporta notevoli complicazioni nella descrizione esatta della propagazione del campo gravitazionale.

Un'importante conferma dell'esistenza di meccanismi di propagazione simili a quelli descritti per il campo elettromagnetico è fornita dallo studio delle equazioni di Einstein in approssimazione di campo debole.

Quest'approssimazione è resa possibile dal fatto che, all'aumentare della distanza dalle sorgenti, la metrica dello spazio-tempo tende ad approssimarsi all'ordinaria metrica piatta. Ha senso pertanto sviluppare le equazioni di Einstein in termini della differenza tra il tensore metrico e il *tensore di Minkowski*  $\eta$ , associato alla metrica dello spazio piatto:

$$\mathbf{h} = \mathbf{g} - \eta \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Supponendo piccola questa grandezza e trascurando i termini di ordine superiore al primo, si ottiene un'equazione lineare analoga nella forma a quella del campo elettromagnetico<sup>3</sup>:

---

<sup>3</sup>L'equazione che si ottiene con il procedimento di linearizzazione è più generale della 2.33. Quest'ultima presuppone una restrizione alla scelta del sistema di coordinate (scelta di *gauge*), dunque dà luogo ad un insieme di soluzioni matematiche più limitato. Ciò non comporta alcuna limitazione di carattere fisico, nel senso che, comunque, tutte le soluzioni fisicamente differenti

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{h} = -\frac{4\pi}{c} \overline{\mathbf{T}} \quad (2.33)$$

Ne risulta un'espressione esplicita del campo gravitazionale formalmente identica a quella del campo elettromagnetico:

$$\mathbf{h}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{d^3\vec{x}'}{r} [\overline{\mathbf{T}}(\vec{x}', t')]_{t-r/c} \quad (2.34)$$

Come nel caso elettromagnetico, le soluzioni non stazionarie sono caratterizzate da una velocità di propagazione finita, da un'energia trasportata e da una diminuzione d'intensità del campo proporzionale all'inverso della distanza. Queste soluzioni descrivono dunque le entità fisiche note col nome di *onde gravitazionali*.

Nello spazio vuoto e lontano dalla sorgente, le onde gravitazionali soddisfano l'equazione:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{h} = 0 \quad (2.35)$$

La soluzione più semplice di questa equazione è l'onda piana monocromatica:

$$\mathbf{h}(\vec{x}, t) = h\varepsilon^{TT} e^{i\frac{\omega}{c}(\vec{n}\cdot\vec{x}-ct)} \quad (2.36)$$

In ogni punto dello spazio il campo ad essa associato, definito dalla parte reale della 2.36, oscilla con frequenza  $\omega$  e ampiezza massima  $h$ ; inoltre l'ampiezza è costante su qualunque piano ortogonale al vettore  $\vec{n}$ . La quantità:

$$\varphi = \frac{\omega}{c}(\vec{n}\cdot\vec{x} - ct) \quad (2.37)$$

è detta fase dell'onda; essa indica i punti dello spazio e gli istanti di tempo in cui il campo ha ampiezza massima ( $\varphi = 0, \varphi = \pi$ ), nulla ( $\varphi = \pi/2, \varphi = 3/2\pi$ ), oppure una qualunque altra ampiezza intermedia. Al trascorrere del tempo, i punti di un piano con fase assegnata traslano in direzione  $\vec{n}$  a

---

sono rappresentate dalla 2.33. Va detto, inoltre, che questa restrizione non determina ancora univocamente il sistema di coordinate: esiste ancora una classe di trasformazioni che lasciano invariata la 2.33, pertanto essa contiene ancora soluzioni ridondanti. Ricordiamo infine che il tensore non coincide con il tensore  $\overline{\mathbf{T}}$  della 2.10 perché, nel processo di linearizzazione di quest'ultima, assorbe alcuni termini del secondo ordine non trascurabili, provenienti dal primo membro[2].

velocità  $c$ , dunque il versore  $\vec{n}$  è identificabile come la direzione di propagazione dell'onda.

La quantità  $\varepsilon^{TT}$ , detta *polarizzazione* dell'onda, è una matrice  $4 \times 4$  a valori complessi. La sua presenza è motivata dal fatto che il campo  $\mathbf{h}$  ha la stessa struttura del tensore metrico. Sebbene le matrici  $4 \times 4$  costituiscano uno spazio vettoriale di dimensione 16, le polarizzazioni fisicamente diverse possono essere ottenute a partire da due sole matrici indipendenti. Tutte le altre sono rappresentazioni delle stesse soluzioni in differenti sistemi di coordinate. Il suffisso  $TT$  indica una particolare scelta del sistema di coordinate (gauge  $TT$ ), con la quale la polarizzazione è rappresentata da una matrice trasversa (ortogonale alla direzione di propagazione) a traccia nulla. Orientando la terna di assi spaziali del sistema di riferimento  $TT$  in modo da far coincidere l'asse  $z$  con la direzione di propagazione dell'onda, tutte le polarizzazioni si possono esprimere come combinazione a coefficienti complessi delle seguenti matrici:

$$\varepsilon_+^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_\times^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

## 2.9 Le onde gravitazionali

La 2.36 è un'equazione d'onda tipica. Una delle più importanti previsioni delle relatività generale è, come già detto, l'esistenza di onde gravitazionali, che ora verranno analizzate dal punto di vista teorico. Si ricordi che l'onda gravitazionale è una geometria dello spazio-tempo che può essere studiata attraverso la sua propagazione in assenza di materia. Si tratta dunque di una soluzione delle equazioni di Einstein 2.16 nel vuoto:  $G_{ik} = 0$

In pratica le onde gravitazionali sono molto deboli, che equivale a dire che si possono studiare considerandole come una piccola perturbazione rispetto ad una geometria di fondo che si può assumere lorentziana (spazio-tempo piatto). Si è dunque nel campo della teoria linearizzata vista nel paragrafo precedente. Le equazioni di Einstein nel vuoto assumono la forma:

$$\square \bar{h}_{ik} = 0 \quad (2.39)$$



con associata la condizione di Lorentz:

$$\bar{h}_{ik,}{}^k = 0 \quad (2.40)$$

la 2.39 e la 2.40 ammettono un' ulteriore invarianza di gauge, sempre del tipo

$$h_{ik} \rightarrow h'_{ik} = h_{ik} + \varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{k,i}$$

(eq. 2.26) solo che ora  $\varepsilon_i$  non è del tutto arbitrario: si verifica che occorre la condizione

$$\square \varepsilon_i = 0 \quad (2.41)$$

Fino a questo punto il tensore ha 6 componenti indipendenti: infatti ne avrebbe dovuto avere 10 in quanto simmetrico, ma ci sono le 4 condizioni 2.40. Si sfrutta la residua invarianza di gauge per dimostrare che le componenti indipendenti sono solo due. Per far ciò bisogna considerare un particolare tipo di soluzioni.

## 2.10 Onde piane monocromatiche

La 2.39 e la 2.40 in quanto equazioni lineari ed invarianti per traslazioni di tutte e 4 le coordinate, ammettono soluzioni piane monocromatiche:

$$\bar{h}_{ik} = a_{ik} \exp\{ik_j x^j\} \quad (2.42)$$

in cui le  $a$  sono costanti complesse. Poiché le 2.42 soddisfano le 2.39 occorre e basta che sia  $k_j k^j = 0$ , cosa questa che mi dice che l'onda si propaga alla velocità della luce. Dalle 2.40 segue poi  $k^k a_{ik} = 0$ , e le ampiezze indipendenti non sono 10 ma 6.

Applicando poi alla 2.39 una trasformazione di gauge del tipo:

$$\varepsilon_i = a_i \exp\{ik_j x^j\} \quad (2.43)$$

(che automaticamente soddisfa le  $\square \varepsilon_i = 0$ ) si vede che si possono scegliere le 4 costanti  $a_i$  in modo che sia:

$$\begin{aligned}\bar{h}_{i0} &= 0 \\ \bar{h}_\alpha^\alpha &= 0\end{aligned}\tag{2.44}$$

La seconda delle 2.44 dice che la traccia di  $\bar{h}_{ik}$  è nulla, e ricordando la definizione di  $\bar{h}_{ik}$  vedo che ora è  $\bar{h}_{ik} = h_{ik}$ .

La prima delle 2.44 mi dice invece che  $h_{ik}$  ha solo le componenti spaziali  $h_{\alpha\beta}$ , che sono soggette alle seguenti condizioni:

$$\square h_{\alpha\beta} = 0\tag{2.45}$$

$$h_{\alpha\beta, \beta} = 0 \quad h_\alpha^\alpha = 0\tag{2.46}$$

Per un'onda piana la prima delle 2.46 diventa  $k_\beta h^{\alpha\beta} = 0$ , che significa che l'onda non ha componenti nella direzione di propagazione. Le 2.46 si possono riassumere dicendo che un'onda gravitazionale piana monocromatica può sempre essere messa con un'opportuna trasformazione di gauge in forma trasversa ed a traccia nulla (*TT*).

Poiché le 2.46 sono 4 equazioni, risulta dimostrato per un'onda piana monocromatica che le componenti indipendenti di  $h^{\alpha\beta}$  sono soltanto due.

È anche vero che ogni soluzione delle 2.39 e 2.40 può essere scritta come sovrapposizione di onde piane monocromatiche (integrali di Fourier); dato che le 2.44, 2.45, 2.46 sono lineari, esse saranno soddisfatte da qualsiasi soluzione, e questo dimostra che tutte le onde gravitazionali soluzioni della 2.39 possono essere ridotte per mezzo di una trasformazione di gauge nella forma *TT*. Nel seguito, salvo diversa informazione, si userà sempre questa condizione.

## 2.11 Stati di polarizzazione

Il fatto che le componenti indipendenti di un'onda gravitazionale siano sempre due equivale a dire che esistono due soli stati di polarizzazione indipendenti. Anche stavolta la situazione è analoga a quella di un'onda elettromagnetica. La differenza è che un'onda elettromagnetica è descritta da un campo vettoriale (in gauge di Coulomb dal potenziale vettore) e si usano perciò le polarizzazioni

lineari secondo direzioni ortogonali. Tutti gli altri stati di polarizzazione, come ad esempio quelli circolari, si ottengono da combinazioni lineari di questi.

Per studiare le onde gravitazionali si ha a che fare con un tensore, e gli stati di polarizzazione sono descritti in modo diverso. Si supponga che l'onda si propaghi in direzione  $z$ : le componenti non nulle allora saranno  $h_{xx}, h_{xy}, h_{yy}, h_{yx}$ . Esistono però dei vincoli:  $h_{xy} = h_{yx}$  per simmetria,  $h_{xx} + h_{yy} = 0$  perché la traccia è nulla.

Si possono fare dunque due scelte indipendenti:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{polarizzazione } +) \quad (2.47)$$

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{polarizzazione } \times) \quad (2.48)$$

Una delle differenze fondamentali con le onde elettromagnetiche è che con queste si ottiene un cambiamento di polarizzazione per rotazione di  $90^\circ$ , mentre con le onde gravitazionali si passa da  $+$  a  $\times$  ruotando di  $45^\circ$ .

## 2.12 Effetti osservabili dalle onde gravitazionali

Si è detto che l'onda gravitazionale è una perturbazione dello spazio-tempo. Per calcolare gli effetti che produce si comincia col calcolare il tensore di Riemann per un'onda in gauge  $TT$ . Si trova che  $R_{0\beta 0}^\alpha = \frac{1}{2}h_{\alpha\beta,00}$  e che tutte le altre componenti sono nulle. Si consideri l'equazione conosciuta come "equazione dell'accelerazione di marea": (per i dettagli matematici e la sua definizione si veda cap. 11 della [3])

$$\varepsilon_{,0,0}^\alpha = -R_{0\beta 0}^\alpha \varepsilon^\beta \quad (2.49)$$

in cui  $\varepsilon^\alpha$  indica la separazione relativa tra le due masse.

C'è bisogno di alcune considerazioni qualitative. La teoria di Einstein vede la gravità non come forza, ma come una deformazione dello spazio-tempo. Secondo Einstein lo stato naturale del moto di un corpo è la caduta libera in un senso molto più ampio di quello classico newtoniano. Per caduta libera,

Einstein intende la tendenza di un corpo a seguire la geodetica dello spazio-tempo. Perciò per Einstein un riferimento fermo in un campo gravitazionale non è inerziale, perché per tenerlo fermo occorre forzarlo : il riferimento inerziale è quello in caduta libera (che segue la geodetica).

Il principio di equivalenza ci dice che un riferimento inerziale nel senso di Einstein è indistinguibile da un riferimento inerziale nel senso di Newton, posto lontano da qualsiasi sorgente di campo gravitazionale.

L'equivalenza perciò è solo locale, perché i campi gravitazionali possono variare con la distanza dalla sorgente e non essere uniformi. È proprio la variazione del campo gravitazionale che non è altro che la variazione della geometria dello spazio-tempo a far deviare due geodetiche che originariamente erano parallele ed a creare le cosiddette forze mareali.

Quindi l'onda gravitazionale risulta essere una perturbazione dello spazio-tempo che, creando delle accelerazioni di marea, fa deviare le geodetiche delle mie masse-campione. È questo l'effetto che si cerca di osservare. Si ricordino i due assiomi fondamentali su cui si forma la relatività generale:

- I) lo spazio-tempo è una varietà 4-dimensionale;
- II) intorno ad ogni punto dello spazio-tempo esiste sempre un riferimento inerziale locale (RIL) che possiede le seguenti proprietà:
  - a) in un RIL la fisica è lorentziana, nel senso che vale la relatività speciale e lo spazio-tempo è piatto (solo localmente, perché su regioni estese si possono avere delle deviazioni nello spazio-tempo)
  - b) un RIL è determinato dall'assenza di gravità, cioè dalla validità del principio d'inerzia.

Usando il tensore di Riemann per un'onda in gauge TT, l'equazione dell'accelerazione di marea diventa:

$$\frac{d^2 \varepsilon^\alpha}{dt^2} = -R_{0\beta 0}^\alpha \varepsilon^\beta = -\frac{1}{2} \frac{d^2 h_{\alpha\beta}}{dt^2} \varepsilon^\beta \quad (2.50)$$

che dice che se si hanno due masse libere in un RIL, in una regione investita da un'onda gravitazionale, esse oscilleranno secondo la 2.50. La loro distanza in generale varierà nel tempo, e questo è un effetto osservabile.

In particolare bisogna supporre che, cosa che di solito avviene,  $|h_{ab}| \ll 1$ : allora l'ampiezza di oscillazione sarà piccola rispetto alla distanza media e quindi la 2.50 può essere approssimata con:

$$\frac{d^2 \delta \varepsilon^\alpha}{dt^2} = -R_{0\beta 0}^\alpha \varepsilon^\beta = -\frac{1}{2} \frac{d^2 h_{\alpha\beta}}{dt^2} \varepsilon_0^\beta \quad (2.51)$$

dove  $\varepsilon_0$  indica la distanza media e  $\delta \varepsilon$  lo scostamento dalla media. Integrando si ha:

$$\delta \varepsilon^\alpha = -\frac{1}{2} h_{\alpha\beta} \varepsilon_0^\beta \quad (2.52)$$

e si vede che  $\delta \varepsilon / \varepsilon_0$  è dello stesso ordine di  $h$ . Se le due masse fossero collegate elasticamente avrò:

$$\frac{d^2 \delta \varepsilon^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 h_{\alpha\beta}}{dt^2} \varepsilon_0^\beta - \omega_0 \delta \varepsilon^\alpha \quad (2.53)$$

e per onde monocromatiche, questa si integra immediatamente:

$$\delta \varepsilon^\alpha = \frac{\omega^2 h_{\alpha\beta} \varepsilon_0^\beta}{2(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.54)$$

Rispetto alla 2.52 è presente il fattore di risonanza  $\omega^2 / (\omega_0^2 - \omega^2)$ , nel quale ho ovviamente trascurato l'effetto dello smorzamento dell'oscillatore. I due casi, 2.52 e 2.54 descrivono con un'estrema semplificazione i due tipi di antenne gravitazionali in uso: Virgo e LIGO, che sono dei rilevatori interferometrici dove le masse sono libere, e la sensibilità viene aumentata facendo in modo che la distanza  $\varepsilon_0$  tra le masse sia la più grande possibile; il secondo invece rappresenta il classico sistema di Weber (rivelatori a barre di risonanza), dove la molla è costituita dalla stessa elasticità del blocco rigido che costituisce l'antenna.

La sensibilità di Virgo, a frequenze di 10 Hz e con tempi di misura dell'ordine di un anno dovrebbe arrivare a  $10^{-24}$ . Valutiamo cosa significa questo in termini di energia. Si consideri la densità di un'onda gravitazionale:

$$T_{00} = \frac{\left\langle \frac{dh_{\alpha\beta}}{dt} \frac{dh^{\alpha\beta}}{dt} \right\rangle}{32\pi} \quad (2.55)$$

(cap.35 della [3]) dove la media va intesa su regioni spaziali grandi rispetto ad una lunghezza d'onda, e su tempi lunghi rispetto ad un periodo. Per un'onda monocromatica è:

$$h_{xx} = -h_{yy} = a \cos(kz - \omega t) \quad (2.56)$$

da cui si ricava:

$$T_{00} = \frac{\omega^2 a^2}{32\pi} \quad (2.57)$$

che va moltiplicato per  $c^2/G$  se si vuole in unità ordinarie, ed ancora per  $c$  per avere l'intensità. Così si ottiene:

$$S = \frac{c^3 \omega^2 a^2}{32\pi G} \quad (2.58)$$

Sostituendo i dati, cioè ponendo  $a = 10^{-24}$ ,  $\omega = 60 \text{ rad s}^{-1}$ , si trova  $S = 10^{-8} \text{ erg cm}^2 \text{ sec}^{-1}$ . Per capire il valore di questo risultato bisogna confrontarlo con la radiazione elettromagnetica totale che arriva da una stella: ho la stessa intensità per stelle di magnitudine 8, ossia visibili già con un modesto binocolo. Le stelle più deboli che si possono rivelare con gli strumenti odierni hanno intensità inferiori di almeno un ordine di grandezza. Questo porta alla conclusione che la rivelazione delle onde gravitazionali è molto meno efficiente di quella delle onde elettromagnetiche. Per essere sicuri però bisogna fare un paragone con sorgenti realistiche, che avverrà nel prossimo capitolo.

## 2.13 L'interazione di un'onda gravitazionale con la materia

Per avere un'idea concreta di come può manifestarsi un'onda gravitazionale, è utile scrivere esplicitamente, nel sistema di coordinate  $TT$ , la distanza propria tra due eventi nel campo di un'onda gravitazionale piana monocromatica che si propaga in direzione  $z$ , con polarizzazione . Dalle 2.8, 2.32, 2.36 e 2.38, si ricava la seguente espressione:

$$ds^2 = \left\{ 1 + h \cos \left[ \frac{\omega}{c}(z - ct) \right] \right\} dx^2 + \left\{ 1 - h \cos \left[ \frac{\omega}{c}(z - ct) \right] \right\} dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (2.59)$$

Si consideri una coppia di eventi contemporanei e allineati lungo l'asse  $x$  nello spazio  $TT$ :

$$\mathbf{X}_1(t, x, y, z) \qquad \mathbf{X}_2(t, x + L, y, z) \qquad (2.60)$$

Essi localizzano gli estremi di un segmento disposto lungo un asse di polarizzazione del campo gravitazionale. Il vettore infinitesimo orientato lungo questo segmento ha solo la componente  $x$  diversa da zero:

$$d\mathbf{X} = (0, dx, 0, 0) \qquad (2.61)$$

Sostituendo le componenti di questo vettore nella 2.59, si ricava l'espressione dell'elemento infinitesimo di lunghezza propria del segmento. Nell'ipotesi  $h \ll 1$ , questa si scrive:

$$ds = \left\{ 1 + \frac{h}{2} \cos \left[ \frac{\omega}{c} (z - ct) \right] \right\} dx \qquad (2.62)$$

Integrando la 2.62 tra gli estremi  $X_1$  e  $X_2$ , si ottiene infine:

$$s_{1,2} = L + \frac{Lh}{2} \cos(\omega t + \phi) \qquad (2.63)$$

Si otterrebbe ovviamente un risultato analogo partendo da due eventi contemporanei allineati lungo l'asse  $y$ . In definitiva, si può affermare quanto segue:

**la lunghezza propria di un segmento disposto lungo un'asse di polarizzazione (asse  $x$  o asse  $y$ ) oscilla nel tempo con la frequenza dell'onda gravitazionale.**

Per comprendere il significato fisico di quello che fin qui potrebbe sembrare un puro esercizio matematico, è necessario un approfondimento sul sistema di coordinate  $TT$ .

Risulta dall'equazione della geodetica associata alla 2.59 che ogni traiettoria di quiete, a partire da una posizione qualsiasi dello spazio-tempo, è una traiettoria geodetica, cioè liberamente gravitante. In altre parole, ogni corpo libero inizialmente in quiete nello spazio  $TT$  permane in questo stato anche negli istanti successivi. Lo spazio  $TT$  è dunque fisicamente costruibile disponendo a reticolo un insieme di masse libere, ciascuna delle quali individua univocamente una terna di valori per le coordinate spaziali.

Gli eventi  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  della 2.60 sono due nodi del reticolo e rappresentano la linea oraria di due masse libere; il segmento che li unisce rappresenta la loro reale separazione. L'effetto di un'onda gravitazionale sulla materia consiste dunque nell'oscillazione della distanza propria tra due masse libere in quiete relativa, secondo la 2.63.

Per comprendere come possa essere concretamente apprezzato l'effetto appena descritto, conviene cambiare punto di vista, adottando un sistema di riferimento differente. Il punto di vista del sistema  $TT$ , dal quale appare che lo stato di quiete di una massa libera non viene modificato dal sopraggiungere di un'onda gravitazionale, può infatti lasciare l'impressione erronea che si abbia a che fare con un effetto non misurabile. Mostriamo che in un sistema di riferimento reale, come quello che può essere adottato in un normale esperimento di laboratorio, l'oscillazione della distanza propria indotta da un'onda gravitazionale si manifesta come il moto effettivo di un corpo nello spazio.

Si consideri la seguente trasformazione di coordinate (il cui significato risulterà chiaro in seguito):

$$\begin{cases} x' = x \left\{ 1 + \frac{h}{2} \left[ \frac{\omega}{c} (z - ct) \right] \right\} \\ y' = y \left\{ 1 - \frac{h}{2} \left[ \frac{\omega}{c} (z - ct) \right] \right\} \end{cases} \quad (2.64)$$

la quale dà luogo alla nuova espressione della metrica:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -c^2 dt^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz^2 - xH dt dx' + yH dt dy' \\ & + xH dx' dz - yH dy' dz \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$H = h\omega \sin \left[ \frac{\omega}{c} (z - ct) \right]$$

Eseguendo una costruzione analoga a quella illustrata all'inizio del paragrafo, si nota che due eventi contemporanei ( $dt = 0$ ), allineati in direzione ortogonale a quella di propagazione dell'onda ( $dz = 0$ ) e spazialmente immobili (coordinate  $x'$  e  $y'$  costanti nel tempo) hanno distanza propria costante nel tempo ed equivalente alla loro distanza euclidea:

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 \quad (2.66)$$

Da notare che, in assenza dell'onda gravitazionale, il nuovo sistema di coordinate si riconduce a quello di uno spazio euclideo: questo significa che



la distanza propria tra i due eventi considerati non è influenzata dal passaggio dell'onda gravitazionale. Si può dunque affermare che i due eventi individuano gli estremi di un regolo rigido, intendendo per 'rigidezza' la proprietà dei vincoli interni tra le particelle del corpo di opporsi ad ogni modificazione della loro distanza propria.

Il sistema di coordinate accentato è dunque quello che adotterebbe un osservatore che volesse misurare lo spostamento di un corpo secondo la maniera più classica, confrontando la sua posizione con quella un regolo rigido.

Il procedimento può essere schematizzato come segue. Si adotta inizialmente il sistema inerziale locale definito da una massa liberamente gravitante nel campo di un'onda gravitazionale piana polarizzata. Questa massa individua l'origine spaziale  $\mathbf{O}_t = (t, 0, 0, 0)$  del sistema di riferimento.

Si dispone il regolo rigido lungo una direzione di polarizzazione, con un'estremità nell'origine. L'altra estremità individua il punto  $\mathbf{X}'_L = (t, L, 0, 0)$ . L'asse  $X'$  così definito è la costruzione pratica della coordinata alla quale si riferisce la trasformazione introdotta in precedenza 2.64.

Nell'istante  $t = 0$ , si pone una massa libera in corrispondenza del punto  $\mathbf{X}'_L$ , in quiete nel sistema  $TT$ . Ad essa si attribuiscono le coordinate  $TT$ :  $\mathbf{X}_L = (0, L, 0, 0)$ . Per quanto detto all'inizio del paragrafo, le sue coordinate spaziali  $TT$  restano immutate al trascorrere del tempo.

Si costruisce la legge oraria della massa libera nel sistema di coordinate accentato, osservando l'evoluzione temporale della sua posizione rispetto al regolo. Essa non può essere altro che la trasformata di  $\mathbf{X}_L(t)$  secondo la 2.64, la quale definisce appunto le equazioni di trasformazione dal sistema  $TT$  al sistema del laboratorio:

$$\mathbf{X}'_L(t) = \left( t, L \left[ 1 + \frac{h}{2} \cos(\omega t) \right], 0, 0 \right) \quad (2.67)$$

Quanto si osserva, è dunque un moto oscillatorio della massa libera rispetto all'estremità del regolo, di frequenza uguale a quella dell'onda gravitazionale e di ampiezza  $Lh/2$ .

Con procedimento analogo si dimostra che, se la massa libera è disposta sull'asse  $y$ , si manifesta un'oscillazione con la stessa frequenza ed ampiezza, ma sfasata di  $\pi$  rispetto alla prima. In pratica, quando la massa disposta lungo

l'asse  $x$  si allontana dall'origine, quella disposta lungo l'asse  $y$  si avvicina. La Figura 2.1 mostra come si comporta un anello di masse libere disposto sul piano di polarizzazione di un'onda gravitazionale piana polarizzata  $\varepsilon_{TT}^+$ . Il sistema di riferimento è quello descritto dalla 2.64 e la sua origine coincide con il centro dell'anello.

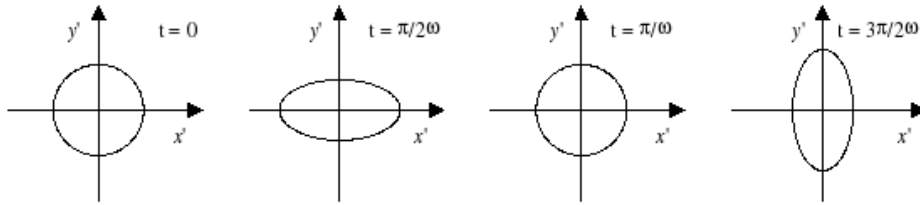


Figura 2.1: Moto di un anello di masse libere nel campo di un'onda gravitazionale polarizzata  $\varepsilon_{TT}^+$ .

Nel caso in cui l'onda abbia polarizzazione  $\varepsilon_{TT}^x$ , gli assi di massima oscillazione dell'anello coincidono con le bisettrici dei quadranti: in effetti, le due polarizzazioni si possono ottenere l'una dall'altra per mezzo di una rotazione di  $45^\circ$  del sistema di riferimento intorno all'asse  $z$ .

Si può dunque affermare che le onde gravitazionali sono osservabili, in linea di principio, perché possono produrre un movimento effettivo di masse libere rispetto ad un sistema di riferimento rigido<sup>4</sup>. Questo movimento è interpretabile, secondo uno schema totalmente classico, come l'effetto dell'applicazione di una forza reciproca tra le masse, prodotta dal campo dell'onda gravitazionale. Si può anzi affermare, più in generale, che piccole fluttuazioni della distanza propria, riferite ad un sistema rigido, possono essere sempre interpretate in termini di applicazione di una forza.

---

<sup>4</sup>La costruzione esposta in questo paragrafo è stata sviluppata unicamente per mettere in evidenza come la fluttuazione della distanza propria tra due masse sia una grandezza osservabile. Nella realtà, una tecnica di rilevazione delle onde gravitazionali basata sull'osservazione dello spostamento di una massa libera rispetto ad un sistema rigido è impraticabile, se non altro perché un regolo di grandissime dimensioni non può mai essere sufficientemente rigido.

I moderni rivelatori di onde gravitazionali si basano sulla misura interferometrica degli spostamenti. Si noti che l'entità dello spostamento da misurare è proporzionale alla distanza  $L$  tra due masse di prova, oltre che all'ampiezza  $h$  dell'onda gravitazionale; per questo motivo si stanno costruendo rivelatori di grandissime dimensioni.

Resta il fatto che, essendo dell'ordine di  $10^{-21}$  l'ampiezza delle onde gravitazionali più intense attese sulla Terra, anche con rivelatori delle dimensioni di alcuni chilometri gli spostamenti da misurare sono estremamente piccoli ( $10^{-18}$  metri). Questo spiega perché fino ad oggi non è stato ancora possibile osservare direttamente un'onda gravitazionale.

## 2.14 La generazione di onde gravitazionali

Bisogna valutare ora l'emissione delle onde gravitazionali per collegarla alle caratteristiche dinamiche delle sorgenti. Così si potrà capire quali siano le sorgenti astrofisiche di onde gravitazionali e la relativa potenza.

Per avere un'idea del legame tra l'ampiezza di un'onda gravitazionale e le grandezze che caratterizzano lo stato dinamico della sorgente, è utile studiare la soluzione della 2.33 in un caso semplice.

Un'espressione approssimata per il campo di un'onda gravitazionale emessa da una sorgente non relativistica<sup>5</sup> si ottiene dalla 2.34, prendendo l'ordine più basso dello sviluppo dell'integrale in termini del parametro  $v/c$ . Le sue componenti spaziali si esprimono come segue:

$$\mathbf{h}^{ij}_{\vec{x}, t} = \frac{2G}{c^4 r_0} \left[ \frac{d^2 I^{ij}}{dt^2} \right]$$

$$I^{ij} = \int d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}', t') (x'^i x'^j - \frac{1}{3} |\vec{x}'|^2 \delta^{ij}) \quad (2.68)$$

dove  $r_0$  è la distanza tra la sorgente ed il punto in cui si calcola il campo<sup>6</sup>. Nello sviluppo si suppone che  $r_0$  sia grande rispetto alla lunghezza delle onde irraggiate.

---

<sup>5</sup>Per 'sorgente non relativistica' si intende un corpo o un sistema di corpi in cui le singole parti si muovono a velocità piccola rispetto a quella della luce. Una conseguenza è che la lunghezza delle onde irraggiate è grande rispetto alle dimensioni della sorgente.

<sup>6</sup>L'ampiezza dell'onda è inversamente proporzionale alla distanza  $r_0$  tra sorgente e punto di osservazione, come tipicamente avviene nei fenomeni di propagazione per onde.

La matrice  $I_{ij}$ , detta *momento di quadrupolo*, è una grandezza proporzionale alla massa della sorgente, ma dipende anche dall'asimmetria della sua densità: essa ha componenti diverse da zero soltanto se la distribuzione di massa si discosta dalla simmetria sferica.

L'ampiezza dell'onda gravitazionale dipende dalla derivata seconda del momento di quadrupolo, dunque dalle componenti asimmetriche dell'accelerazione.

Va inoltre segnalata la presenza del fattore costante  $G/c^4 = 8.3 \times 10^{-45} \text{ s}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$ : esso è responsabile del fatto che l'irraggiamento gravitazionale ha dimensioni estremamente piccole rispetto agli altri fenomeni d'interazione della materia, cosa che rende molto difficile la sua osservazione.

Si può ragionare anche in termini diversi: ricordiamo questa espressione per in campo di radiazione elettromagnetica:

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 R} \left\{ \left( \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} x \vec{n} \right) x \vec{n} + \left( \frac{d^2 \vec{q}}{dt^2} x \vec{n} \right) x \vec{n} + x \vec{n} \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} \right\} \quad (2.69)$$

Questa espressione da i primi termini dello sviluppo in multipoli:  $R$  è la distanza tra sorgente ed osservatore,  $\vec{n}$  il vettore unitario nella direzione di  $R$ . I vettori  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{u}$  sono così definiti:  $\vec{p} = \sum_a e_a \vec{r}_a$  è il momento di dipolo elettrico;  $\vec{q}$  è dato in termini di del momento di quadrupolo elettrico  $Q$  come segue:  $q^i = \frac{1}{2c} Q^{ij} \eta_j$ . Infine si ha il momento di dipolo magnetico che è dato da:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_a e_a \vec{r}_a x \vec{v}_a \quad (2.70)$$

dalla 2.54 si ricava subito la luminosità elettromagnetica+, ossia la potenza irradiata:

$$L_{\text{em}} = \frac{2}{3c^2} \left| \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right|^2 + \frac{1}{20c^2} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} + \frac{2}{3c^2} \left| \frac{d^2 \vec{\mu}}{dt^2} \right|^2 \quad (2.71)$$

dalla quale si vede che i termini di dipolo elettrico, di quadrupolo e di dipolo magnetico danno contributi additivi alla luminosità totale. Ora bisogna trasportare queste relazioni al caso gravitazionale. Si introducono diversi momenti di multipolo, solo sostituendo alle cariche le masse.

Si ha dunque:  $\vec{p} = \sum_a m_a \vec{r}_a$  ed osservo che  $\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} = 0$  per la sola conservazione della quantità di moto. Analogamente  $\vec{u} = \frac{1}{2c} \sum_a m_a \vec{r}_a x \vec{v}_a$  e

questa volta è già  $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$  per la conservazione del momento angolare. Resta quindi solo il termine di quadrupolo gravitazionale, la cui definizione è:

$$Q^{ij} = \sum_a m_a \left( x_a^i x_a^j - \frac{1}{3} x_a^2 \delta^{ij} \right) \quad (2.72)$$

Il momento di quadrupolo è dunque la parte a traccia nulla del tensore d'inerzia. Al posto della 2.71 la relatività generale fornisce (in unità geometriche):

$$L_{\text{grav}} = \frac{1}{5} \left\langle \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right\rangle \quad (2.73)$$

che è una media temporale. Per trasformare la 2.73 e portarla in unità consuete devo introdurre la giusta combinazione di potenza di  $c$  e  $G$ . A questo scopo si osserva che  $\frac{d^3 Q}{dt^3}$  ha esattamente le dimensioni di una luminosità, quindi la 2.73 va divisa per una luminosità. Con  $c$  e  $G$  si può costruire una sola grandezza con le giuste dimensioni:

$$L_0 = \frac{c^5}{G} = 3.56 \times 10^{59} \text{ erg s}^{-1} \quad (2.74)$$

per cui la 2.73 diventa:

$$L_{\text{grav}} = \frac{G}{5c^5} \left\langle \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right\rangle \quad (2.75)$$

Riprendendo in mano il discorso di inizio paragrafo, ci si rende conto che è molto semplice calcolare esplicitamente il campo espresso dalla 2.68 nel caso di un sistema costituito da due corpi di uguale massa  $M$ , di piccole dimensioni rispetto alla loro distanza  $2R$  ed in rotazione a velocità  $v$  intorno al baricentro. Risulta che il sistema emette onde monocromatiche con frequenza  $\Omega = 2v/R$ , pari alla frequenza con cui i corpi si scambiano le rispettive posizioni, cioè il doppio della frequenza orbitale. La direzione di massima emissione è l'asse polare della sorgente (la verticale rispetto al piano dell'orbita). In questo caso, l'ampiezza e la polarizzazione dell'onda si scrivono rispettivamente:

$$h = \frac{8GMv^2}{c^4 r_0} \quad \varepsilon = \varepsilon_+^{TT} + i\varepsilon_\times^{TT} \quad (2.76)$$

Nelle direzioni equatoriali le onde emesse sono invece polarizzate  $\varepsilon_+^{TT}$  e l'ampiezza si riduce alla metà rispetto al suo valore massimo. Il sistema

appena descritto non ha interesse soltanto dal punto di vista accademico, perché l'universo è in realtà molto popolato di oggetti simili: *i sistemi binari*. Questi oggetti astronomici sono costituiti da una coppia di stelle in rotazione l'una intorno all'altra, a causa della reciproca attrazione gravitazionale. In molti casi la loro massa e velocità sono tali da renderli buone sorgenti di onde gravitazionali.

Nel caso di masse uguali, orbite circolari e velocità non relativistiche, utilizzando il legame classico tra la velocità ed il raggio dell'orbita per i moti kepleriani, la 2.76 si può esprimere in una forma molto semplice, che permette di avere un'idea immediata dell'ampiezza del campo gravitazionale in termini delle dimensioni del sistema binario e della distanza del punto di osservazione dalla sorgente:

$$h \approx \frac{R_S^2}{Rr_0} \quad R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.77)$$

È stata introdotta, al posto della massa, la lunghezza  $R_S$ , detta *raggio di Schwarzschild*. Il suo ordine di grandezza è qualche chilometro per corpi la cui massa sia paragonabile a quella del Sole<sup>7</sup>.

Un sistema binario comune, le cui dimensioni siano paragonabili a quelle del Sistema Solare ( $R_S \approx 10^3$  m;  $R \approx 10^{12}$  m), emette un'onda gravitazionale di ampiezza  $h \approx 10^{-25}$ , misurata su distanze galattiche tipiche (migliaia di anni-luce:  $r_0 \approx 10^{19}$  m), e di frequenza  $\Omega \approx 10^{-9}$  Hz. Se invece il sistema binario è costituito da stelle di neutroni o buchi neri in orbita estremamente ravvicinata ( $R \approx 10 R_S$ ), l'ampiezza dell'onda gravitazionale diventa  $h \approx 10^{-17}$ , su distanze galattiche, o  $h \approx 10^{-20}$ , su distanze intergalattiche (milioni di anni-luce), e la frequenza  $\Omega \approx 10^3$  Hz. Come vedremo in seguito, la frequenza dell'onda gravitazionale è un parametro tutt'altro che secondario, perché da esso dipende fortemente la sensibilità dei rivelatori. Attualmente non è possibile costruire rivelatori terrestri con buona sensibilità al di sotto di qualche Hertz.

Esistono altri fenomeni astronomici in cui grandissime estensioni di materia subiscono enormi accelerazioni: un esempio è costituito dagli eventi esplosivi ai quali vanno incontro le stelle più massicce nell'ultima fase del loro processo

---

<sup>7</sup>Si tratta della dimensione tipica degli oggetti celesti estremamente compatti. Se un corpo di massa  $M$  collassa in una sfera di raggio inferiore a  $R_S$ , lo spazio-tempo all'interno di quest'ultima acquista una curvatura talmente elevata che perfino le traiettorie della luce vi restano intrappolate: ha così origine un buco nero.

evolutivo (*supernovae*). Una volta cessate le reazioni nucleari, responsabili delle emissioni elettromagnetiche della stella, la forza di gravità non è più bilanciata dalla pressione verso l'esterno generata dalla radiazione, e la materia inizia a cadere verso il centro della stella, sotto l'azione del proprio peso. Nel nucleo centrale della stella, l'estrema compressione della materia determina il crollo della struttura atomica, al decadimento delle coppie protone-elettrone in neutroni, ed all'emissione di radiazione verso l'esterno. A questo punto il collasso gravitazionale termina bruscamente, perché il nucleo stellare raggiunge la sua massima compattezza e si trasforma in una *stella di neutroni*. L'enorme quantità di energia che si libera in quel momento porta all'espansione degli strati esterni e ad un grande incremento della luminosità della stella. Nel caso in cui la stella risieda nella nostra galassia, appare improvvisamente nella volta celeste un nuovo oggetto luminoso, che poi si spegne nel giro di qualche giorno.

Se il fenomeno è molto ben osservabile dal punto di vista elettromagnetico, dal punto di vista dell'emissione di onde gravitazionali la situazione non è altrettanto favorevole, perché il collasso gravitazionale dovrebbe essere caratterizzato da una sostanziale simmetria sferica. In questo caso il momento di quadrupolo è un termine secondario nello sviluppo della distribuzione di materia, la cui entità è legata ad asimmetrie più o meno casuali e difficili da prevedere, se non attraverso modelli teorici molto complessi ed incerti. Va detto però che, durante il collasso, e soprattutto nel momento del rimbalzo finale, sono in gioco accelerazioni così elevate da far ritenere che l'emissione gravitazionale delle *supernovae* sia dell'ordine o superiore a quella dei sistemi binari precedentemente descritti.

## 2.15 Ordini di grandezza

Per avere un'idea degli ordini di grandezza in gioco, conviene innanzitutto osservare che  $L_0$  è pari alla luminosità di almeno  $10^{15}$  delle più grandi galassie conosciute. È anche interessante un'interpretazione semiquantitativa di  $\frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \equiv Q'''$ , per un sistema di masse che si muova di moto periodico (come ad esempio una stella binaria). Il tensore d'inerzia avrà un ordine di grandezza pari al prodotto della massa del sistema per il quadrato del suo diametro:  $MR^2$ . La derivata terza richiederà di dividere per la terza potenza del periodo; quindi

$Q''' \approx \frac{MR^2}{T^3}$ . Ma  $R/T$  da una tipica velocità del moto, e si arriva a  $Q''' \approx \frac{Mv^2}{T}$ . Poiché  $Mv^2$  è l'energia cinetica  $E_K$  del sistema, si ha:

$$Q''' \approx \frac{E_K}{T} \quad (2.78)$$

$E_K/T$  rappresenta l'energia cinetica ad un certo istante, localizzata nel punto dove si trovano le masse. Nel corso del moto queste si spostano, cambiando completamente posizione in un tempo  $T$ . Dunque  $E_K/T$  misura la potenza del trasporto d'energia interno del sistema, e la posso chiamare  $L_{\text{int}}$ .

Si può quindi concludere che la 2.73 dice che la potenza irradiata è dell'ordine del quadrato della potenza interna:  $L_{\text{grav}} \approx L_{\text{int}}^2$ , dove è inteso che le luminosità sono misurate in unità di  $L_0$ .

Per procedere con la stima degli ordini di grandezza, bisogna ricordare che in un sistema legato gravitazionalmente, l'energia cinetica è dello stesso ordine dell'energia potenziale, e vale:  $M/R$ . D'altra parte la terza legge di Keplero mi dice che  $R^3 \approx MT^2$ . Eliminando  $T$ :

$$L_{\text{grav}} \approx \left(\frac{M}{R}\right) \quad (2.79)$$

La 2.79 mostra che la radiazione gravitazionale cresce molto rapidamente col rapporto  $M/R$  che è necessariamente minore di 1, anzi molto minore, salvo alcuni casi estremi. Da ricordare che  $M$  è misurata in unità di lunghezza, perciò  $M \geq R$  corrisponderebbe ad un buco nero.

Si può fare un esempio per capire quali sono gli ordini di grandezza in gioco. Supponiamo di avere due stelle di una massa solare ciascuna, alla distanza di una unità astronomica:  $M/R \sim 10^8$ , che porta a:  $L_{\text{grav}} \approx 10^{-40} L_0 \approx 10^{19} \text{ erg s}^{-1} \approx 10^{-14} L_{\odot}$ .

Pur avendo fatto l'ipotesi di campo debole e basse velocità, si nota comunque che l'emissione di onde gravitazionali ha particolare rilievo per oggetti compatti e relativistici. Dalla 2.79 si vede subito che esiste una grande difficoltà di produzione di onde gravitazionali in laboratorio.

## 2.16 Le sorgenti di onde gravitazionali

L'universo dovrebbe dunque essere popolato da oggetti in grado di emettere onde gravitazionali di ampiezza e frequenza tali da essere percepite dai moderni



rivelatori terrestri. Inoltre, a differenza delle onde elettromagnetiche, le onde gravitazionali potrebbero attraversare la materia interstellare senza essere assorbite, rendendo osservabili eventi astrofisici che altrimenti restano oscurati. La possibilità di osservare queste sorgenti è però legata non soltanto alla loro potenza emissiva ed alla frequenza del segnale emesso, ma anche alla loro numerosità entro una data regione di spazio ed un dato intervallo di tempo. Da questo parametro, infatti, dipende la probabilità che una sorgente si trovi in una regione di spazio abbastanza vicina alla Terra, e sia attiva nel periodo in cui si cerca di osservarla.

La ricerca nel campo dell'astrofisica ha messo a punto modelli teorici in grado di stimare la probabilità che fenomeni gravitazionali importanti siano presenti in questo momento, o si realizzino nei prossimi anni, nella nostra galassia o in quelle limitrofe, in un raggio di alcune centinaia di milioni di anni-luce [3]. Va detto che i modelli hanno un'incertezza piuttosto elevata, per la complessità dei sistemi in oggetto e per la difficoltà a reperire dati sperimentali su di essi.

La rivelazione delle sorgenti astrofisiche di onde gravitazionali rappresenterebbe un importante strumento per lo studio dell'universo, oltre a dare una conferma della relatività generale. Le onde gravitazionali e quindi le loro sorgenti vengono di solito classificate a seconda dell'andamento temporale. Si parla di onde impulsive quando queste hanno la durata di pochi cicli o comunque piccola rispetto al tempo d'osservazione che è dell'ordine di un mese (per esempio la radiazione di supernova).

Si parla invece di onde periodiche quelle che hanno un andamento temporale sinusoidale con frequenza  $f$  costante su tempi lunghi dell'ordine del tempo d'osservazione ( per esempio la radiazione emessa dalle pulsar).

Si parla di onde stocastiche quando la loro ampiezza varia in modo casuale. Questo dovrebbe essere creato dal background stocastico di onde gravitazionali di origine cosmologica, che è conosciuta come radiazione gravitazionale di fondo (RGDF).

L'andamento temporale di un'onda gravitazionale è importante per poter confrontare la sua ampiezza col livello di rumore dell'antenna con cui si cerca di rilevarla. Il livello di rumore viene di solito espresso come una densità spettrale lineare equivalente  $\tilde{h}_n(f)$  che dipende dalla frequenza. Vale:

$$\tilde{h}_n(f) = \sqrt{S_h(f)} \quad (2.80)$$

in cui  $S(f)$  indica la densità spettrale di potenza del rumore  $h(t)$  espresso in unità d'ampiezza di onda gravitazionale (adimensionale). Se  $T$  è il tempo di misura si definisce:

$$\tilde{h}_T(f) = \frac{2}{T} \int_{-T}^T h_n(t) \exp -2ift dt \quad (2.81)$$

$$\sqrt{S_h(f)} = \langle \tilde{h}_T^*(f) \tilde{h}_T(f) \rangle \quad (2.82)$$

Si può confrontare l'ampiezza di un onda gravitazionale col rumore una volta che si conosce la larghezza di banda  $\Delta f$  su cui è distribuita l'onda gravitazionale. Se ho delle onde impulsive di durata  $\tau$ , suppongo che l'onda si distribuisca su una banda di larghezza  $\Delta f \approx 1/\tau$ . Allora il rapporto segnale-rumore che definisce la sensibilità del rivelatore sarà dato da:

$$\frac{S}{N} = \frac{h\sqrt{\tau}}{\tilde{h}_n(\Delta f)} \quad (2.83)$$

Si hanno diverse sorgenti ipotizzate. Il fatto che i fenomeni in grado di generare radiazione gravitazionale siano molto complessi fa in modo che sia le stime riguardanti l'ampiezza delle onde emesse, sia quelle riguardanti il numero di eventi che possono essere potenzialmente rivelati, siano abbastanza incerte.

Nel seguito viene proposto un breve quadro riepilogativo delle sorgenti di onde gravitazionali candidate all'osservazione, sulla base delle attuali conoscenze.

### 2.16.1 Sistemi binari

Le frequenze orbitali dei sistemi binari sono generalmente troppo basse perché le onde gravitazionali da essi generate siano osservabili con rivelatori costruiti sulla Terra, essendo la sensibilità di questi ultimi molto limitata per frequenze inferiori a qualche Hertz.

Fanno eccezione i sistemi binari costituiti da oggetti molto compatti, come le stelle di neutroni [4]. La perdita di energia per irraggiamento gravitazionale determina una progressiva diminuzione del raggio dell'orbita e del periodo di rivoluzione del sistema binario, tanto che alcuni di essi possono giungere

alla collisione in tempi relativamente brevi rispetto all'età dell'universo. Nelle ultime ore che precedono lo scontro finale, la frequenza dell'onda entra nella banda di massima sensibilità di un rivelatore come VIRGO (da qualche Hz a qualche kHz), ed aumenta progressivamente fino a raggiungere l'ordine del kHz al momento dell'urto. In questa fase, detta coalescenza, il sistema raggiunge accelerazioni di quadrupolo estremamente elevate, e quindi diventa una sorgente di onde gravitazionali di notevole intensità.

Per quanto riguarda i sistemi binari di Buchi neri, di cui ci si occupa in questa tesi, si può dire che essi hanno una frequenza molto bassa, dell'ordine di  $10^{-1} - 10^{-5}$  Hz e non possono essere osservati da un rivelatore come Virgo, come si dimostrerà nel prossimo capitolo. Un rivelatore adatto a questo tipo di osservazione dovrebbe essere LISA (Laser Interferometer Space Antenna), un interferometro spaziale di cui si parlerà nei prossimi paragrafi.

La relativa semplicità della dinamica di questi sistemi permette una stima piuttosto precisa della loro evoluzione temporale, e quindi dell'andamento del segnale gravitazionale prodotto su un rivelatore. In questi casi è possibile ottenere una diminuzione del rapporto segnale-rumore attraverso l'applicazione di opportuni filtri, il che ne facilita la rivelazione.

La 2.77 fornisce una stima approssimativa dell'ampiezza dell'onda gravitazionale emessa da una binaria coalescente<sup>8</sup>. Se ipotizziamo che la soglia di rilevabilità per questo tipo di segnale sia dell'ordine di  $h \approx 10^{-22}$ , la coalescenza di un sistema binario compatto è visibile ad una distanza dell'ordine di  $10^8$  anni-luce. Le attuali stime prevedono che in questo raggio possano verificarsi alcuni eventi ogni anno.

Bisogna capire come mai siano necessari sistemi compatti. Si usano le unità geometriche. L'emissione di onde gravitazionali comporta perdita di energia del sistema. L'energia dipende solo dal semiasse maggiore dell'orbita relativa e dalle masse:  $E = -\frac{8m}{a}$ . Dunque una variazione di  $E$  comporta una variazione di  $a$ :  $dE/E = da/a$ . Poiché, come già detto in precedenza,  $\frac{dE}{dt} \propto -\left(\frac{m}{a}\right)^5$ , segue ed utilizzando la terza legge di Keplero, secondo cui  $a^3 \propto mT^2$ , si ottiene:

$$\frac{dT}{dt} \propto -\left(\frac{m}{a}\right)^{5/2} \propto -\left(\frac{a}{T}\right)^5 \propto -\left(\frac{m}{T}\right)^{5/3} \quad (2.84)$$

---

<sup>8</sup>La 2.77 è valida esattamente solo nel limite non relativistico, ma fornisce un ordine di grandezza attendibile anche nel caso della coalescenza, dove le velocità in gioco sono vicine a quelle della luce.

Si vede come sia il periodo che il semiasse decrescono nel tempo, e questi potrebbero essere effetti osservabili. Entrambi vanno come potenza di  $(m/a)$ .

La speranza è che un sistema binario formato da oggetti compatti, come stelle di neutroni o buchi neri che possono stare a distanze non troppo più grandi del loro raggio di Schwarzschild.

È doveroso osservare che proprio un sistema binario è l'unico oggetto per il quale esista una conferma sperimentale, seppure indiretta, di quanto previsto teoricamente. Per questa scoperta, avvenuta nel 1974, è stato vinto il premio Nobel dagli scopritori, Joseph Taylor and Russell Hulse, nel 1993. Si tratta del sistema costituito dalla *Pulsar PSR B1913+16* e dal compagno oscuro che le ruota attorno con un periodo di circa 8 ore [5][6]. Per via dell'effetto Doppler la frequenza delle pulsazioni emesse dalla pulsar varia a seconda della sua posizione lungo l'orbita. Analizzando queste variazioni si può risalire ai parametri del sistema binario; in particolare si è trovato che il periodo orbitale delle pulsazioni emesse dalla pulsar varia a seconda della sua posizione lungo l'orbita. Analizzando queste variazioni si può risalire ai parametri del sistema binario; in particolare si è trovato che il periodo orbitale diminuisce secondo un andamento in accordo (entro lo 0.5 %) con quello previsto dalle perdite di energia per l'emissione di radiazione gravitazionale. Infatti in un sistema di questo tipo la distanza tra i due oggetti può essere molto piccola e quindi, la frequenza con la quale ruotano l'uno attorno all'altro, relativamente alta. In tale situazione la perdita di energia per irraggiamento di onde gravitazionali può essere efficiente, portando le due stelle alla coalescenza in tempi brevi rispetto all'età dell'universo. Si stima che il sistema PSR B1913+16 arriverà alla coalescenza tra circa  $3 \times 10^8$  anni. Da questo tipo di sistemi ci si aspetta un'emissione di onde gravitazionali periodiche, con una frequenza che cresce progressivamente nel tempo sino a raggiungere un massimo immediatamente prima della coalescenza, che si stima essere dell'ordine di 1 kHz per binarie di stelle a neutroni, e di  $10 (M_2/M_1)$  kHz, nel caso di binarie formate da buchi neri il cui più massivo abbia massa  $M_1$ .

È stato scoperto un altro oggetto interessantissimo, un sistema doppio di pulsar, in cui entrambe sono visibili. Il loro nome è PSR J0737-3039A/B e hanno un periodo orbitale di 0.1 giorni. La distanza stimata, derivata dalla misura di dispersione, da terra è di  $\sim 0.6$  kpc. Questo oggetto è interessantissimo perché è

un laboratorio naturale in cui si potrà testare la validità della teoria di Einstein. Nel prossimo capitolo si valuterà quale interferometro sia in grado di percepirne il segnale gravitazionale.

### 2.16.2 Supernovae

L'esplosione di una supernova nella nostra galassia è un evento ben documentato fin dall'antichità; le osservazioni antiche e recenti consentono di stimare che accadano mediamente due/tre eventi per secolo, riferendosi esclusivamente alle supernovae che terminano con la generazione di una stella di neutroni. Per quanto affette da grossa incertezza, le stime teoriche portano a ritenere che le onde gravitazionali associate a questi eventi siano alcuni ordini di grandezza al di sopra della sensibilità di un rivelatore interferometrico.

Nell'attesa che accada l'evento fortunato, si può sperare che siano osservabili le onde gravitazionali emesse dalle supernovae delle galassie vicine. L'ammasso Virgo è costituito da centinaia di galassie simili alla nostra, nelle quali complessivamente possono esplodere alcune supernovae ogni anno. Sfortunatamente, la loro distanza dalla Terra ( $\approx 3 \times 10^7$  anni-luce) è tale che la soglia di rilevabilità potrà essere raggiunta solo dagli eventi con elevata asimmetria. Questo parametro, dal quale dipende l'efficienza dell'emissione gravitazionale, non è prevedibile con sufficiente certezza da consentire una stima accurata del ritmo di occorrenza degli eventi rivelabili.

### 2.16.3 Pulsar

Le Pulsar sono stelle di neutroni in rapida rotazione su sé stesse, visibili come sorgenti di onde radio. La nostra galassia ne contiene alcune migliaia la cui frequenza di rotazione è dell'ordine o superiore a qualche Hertz [7]. Incidono sull'ampiezza dell'onda la frequenza  $f$  di rotazione, la distanza  $r$  dalla Terra ed un parametro, indicato con  $\varepsilon$ , legato alla presenza di asimmetrie nella distribuzione di massa. La relazione che segue permette di calcolare il campo  $h$  in funzione di questi parametri.

$$h \approx 10^{-23} \varepsilon \left( \frac{f}{10Hz} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{r}{10kpc} \right)^{-1} \text{ mbox} \quad \varepsilon \approx 10^{-6} \div 10^{-3} \quad (2.85)$$

Nonostante le ampiezze in gioco, molto basse rispetto alle sorgenti descritte in precedenza, le Pulsar hanno il vantaggio di rimanere osservabili per tempi molto lunghi. Questo fatto aumenta la speranza di rivelabilità delle onde gravitazionali emesse, grazie al fatto che la sensibilità di un rivelatore aumenta al crescere del tempo di osservazione.

#### **2.16.4 Fondo stocastico**

Citiamo infine un terzo tipo di onde gravitazionali, diverso da quelle periodiche o impulsive: come accade per le onde elettromagnetiche, potrebbe esistere una radiazione di fondo a banda larga, che riempie lo spazio in modo essenzialmente stazionario ed isotropo. A questa radiazione dovrebbe contribuire la totalità emissioni gravitazionali di ogni parte dell'universo, compreso il residuo 'fossile' di quelle risalenti alla sua prima fase evolutiva.

Le stime relative all'intensità ed alla banda principale di frequenza, sebbene estremamente incerte, non escludono la possibilità che i rivelatori interferometrici in fase di costruzione siano in grado di osservare questa radiazione [8].

## Capitolo 3

# Gli interferometri LISA e Virgo

### 3.1 Rivelatori a barre risonanti

L'effetto misurabile del passaggio di un'onda gravitazionale consiste essenzialmente in una fluttuazione della distanza propria di due masse libere, proporzionale alla distanza stessa. In un sistema di riferimento 'quasi classico', questa oscillazione si manifesta come un effettivo spostamento relativo delle due masse. Il campo dell'onda gravitazionale quindi si comporta a tutti gli effetti come una forza applicata reciprocamente tra le masse.

Una maniera per facilitare l'osservazione di una forza di questo tipo consiste nel collegare elasticamente le due masse, in modo da realizzare un oscillatore armonico. Se il segnale gravitazionale ha componenti spettrali vicine alla frequenza propria dell'oscillatore, lo spostamento indotto sulle masse risulta amplificato, grazie al fenomeno della risonanza. È questo il principio in base al quale sono stati concepiti, all'inizio degli anni '60, i primi rivelatori di onde gravitazionali: le cosiddette *barre risonanti*.

I rivelatori di questo tipo sono costituiti essenzialmente da un cilindro metallico di lunghezza circa un metro e di massa circa una tonnellata. L'elasticità propria del metallo rende il cilindro un sistema risonante in diversi modi ed a diverse frequenze: in particolare, il primo modo associato alla compressione e dilatazione lungo il suo asse ha frequenza propria intorno a 1 kHz. Sono dunque osservabili, in linea di principio, gli eventi impulsivi quali l'esplosione di supernovae e la coalescenza di binarie compatte, le cui frequenze tipiche possono appunto raggiungere questo ordine di grandezza.

Il sistema di trasduzione è costituito da un piccolo oscillatore, applicato ad

un'estremità del cilindro e accordato sulla frequenza propria della barra. I due oscillatori interferiscono dando luogo ad un *battimento*: la vibrazione trasmessa alla barra dalla perturbazione gravitazionale si trasferisce gradualmente al piccolo oscillatore, con un fattore di amplificazione  $\alpha$ , pari alla radice del rapporto delle loro rispettive masse. La vibrazione è convertita in segnale elettrico sfruttando la variabilità con la distanza dell'accoppiamento capacitivo od induttivo tra cilindro e massa di prova.

Purtroppo però esistono il *rumore sismico* ed il *rumore termico* che creano dei problemi alle osservazioni. Il rumore sismico è il disturbo che interessa il sistema per effetto delle vibrazioni naturali della crosta terrestre, alla quale la barra deve ovviamente rimanere vincolata. Il collegamento è realizzato attraverso una speciale sospensione, in modo da attenuare efficacemente la vibrazione sismica nelle sue componenti alle frequenze prossime alla risonanza della barra.

Il rumore termico è il disturbo che interessa il sistema per effetto dell'agitazione degli atomi che compongono la barra. Tale agitazione è quantificabile in termini della loro energia cinetica media, che a sua volta è proporzionale alla temperatura assoluta del sistema. Per questo la barra deve essere mantenuta a temperature molto prossime allo zero assoluto. Con le moderne tecnologie si riescono a raggiungere temperature dell'ordine dei milliKelvin.

### **3.2 L'interferometro di Michelson**

In alternativa al principio della risonanza, è possibile utilizzare un altro meccanismo di amplificazione di una perturbazione gravitazionale: basta ricordare che la distanza propria tra due masse libere oscilla con ampiezza proporzionale alla distanza stessa. Si può dunque immaginare un rivelatore in cui l'elemento sensibile è costituito da due masse reciprocamente svincolate ed estremamente distanti tra loro. È però necessario un trasduttore che permetta di misurare gli spostamenti relativi dei due corpi con alta precisione assoluta, indipendentemente dalla loro distanza.

Misure di questo genere sono possibili, in linea di principio, con tecniche



basate sull'interferenza dei *raggi laser*. Sfruttando questo principio è stato costruito Virgo ed è in fase di costruzione LISA.

Il disegno base è quello dell'interferometro di Michelson: una sorgente laser che invia un fascio luminoso collimato verso uno specchio semitrasparente (*beam splitter*) in posizione centrale; due specchi piani posti al termine di due percorsi ortogonali a partire dallo specchio centrale; un misuratore d'intensità luminosa (*photodiode*) disposto in modo da completare una croce insieme agli altri quattro elementi ottici.

Il raggio laser incide con un angolo di  $45^\circ$  sullo specchio semitrasparente e viene separato in due componenti uguali e coerenti; queste percorrono i rispettivi bracci delimitati dagli specchi piani e vengono riflesse verso il punto di partenza, dove avviene un'ulteriore suddivisione. I raggi che emergono nella direzione del fotodiode hanno accumulato a questo punto una differenza di fase  $\phi_0$ , che dipende dalla differenza  $\Delta L$  di lunghezza dei due bracci e dalla lunghezza d'onda  $\lambda$  della luce laser impiegata:

$$\phi_0 = 2\pi \frac{2\Delta L}{\lambda} \quad (3.1)$$

Lo sfasamento delle componenti che emergono nella direzione della sorgente contiene in più un termine, pari a  $\pi$  radianti, dovuto al fatto che un raggio ha subito due riflessioni sullo specchio semitrasparente, contro nessuna riflessione dell'altro.

Se la differenza di cammino è un multiplo esatto della lunghezza d'onda, i raggi diretti verso il fotodiode interferiscono in fase e ricostruiscono interamente il raggio di partenza, mentre quelli diretti verso la sorgente interferiscono in controfase e si elidono a vicenda.

Nel caso più generale, la differenza di fase determina invece una ricombinazione parziale dei raggi in entrambe le direzioni.

Lo strumento è sensibile agli spostamenti relativi degli specchi, dovuti sia al segnale gravitazionale sia ai cosiddetti *rumori di spostamento*, perché la variazione  $\delta l(t)$  della grandezza  $\Delta L$  determina, in base alla 3.1, la seguente variazione di sfasamento:

$$\phi_L(t) = \frac{4\pi\delta l(t)}{\lambda} \quad (3.2)$$

Altre possibili variazioni dello sfasamento, non legate ad un movimento degli specchi, sono chiamate *rumori di fase*. Per esempio, il cammino ottico dipende dall'indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga la luce. Se nei due bracci dell'interferometro si trova aria a pressione atmosferica, le fluttuazioni dell'indice di rifrazione lungo i due percorsi generano uno sfasamento al fotodiodo, non riconducibile ad alcuno spostamento effettivo degli specchi.

La pressione esercitata sugli specchi dal flusso stocastico di fotoni determina lo spostamento casuale degli specchi, che a sua volta produce un segnale spurio al fotodiodo. Si tratta, in ultima analisi, di una limitazione di natura quantistica alla possibilità di determinare la posizione degli specchi, in accordo con il *principio di indeterminazione di Heisenberg*.

La condizione di interferenza  $\phi_0 = \pi/2$  determina la massima sensibilità dell'apparato agli spostamenti degli specchi, purché siano ininfluenti i rumori di fase e la fluttuazione della potenza emessa dal laser. Di fatto, dal momento che la riduzione dello shot noise impone l'impiego di un laser possibilmente molto potente, la sua stabilità costituisce un problema tecnico rilevante.

Per questo motivo si preferisce fare in modo che l'interferometro lavori in condizione di interferenza distruttiva al fotodiodo, o, come si dice in gergo, 'sulla frangia scura'. Tale condizione si ottiene controllando la posizione degli specchi in modo tale da mantenere costantemente  $\phi = 0$ .

Le fluttuazioni di potenza in ingresso diventano praticamente ininfluenti. Contemporaneamente si ha però la caduta della sensibilità agli spostamenti degli specchi.

Si utilizza allora una tecnica di rivelazione nota come *heterodyne detection*. Essa consiste nell'introdurre in ciascun braccio dell'interferometro, subito dopo il *beam splitter*, un elemento ottico detto *pockels cell*. Questo dispositivo, alimentato con un opportuno segnale in tensione, genera una modulazione sinusoidale della fase nel raggio da cui è attraversato, di ampiezza  $\delta$  e pulsazione  $\Omega$ .

Compaiono pertanto due bande laterali, la cui separazione dalla frequenza principale è pari alla frequenza di oscillazione degli specchi, e la cui ampiezza è proporzionale all'ampiezza della stessa oscillazione.

### 3.3 La rivelazione interferometrica di onde gravitazionali

Si immagini un interferometro a bracci uguali di lunghezza  $L$ , disposti parallelamente agli assi di polarizzazione di un'onda gravitazionale piana di ampiezza  $h$  e pulsazione  $\omega$ , con gli specchi liberamente gravitanti nel campo dell'onda. Le lunghezze proprie dei bracci oscillano in controfase secondo la

$$s_{12} = L + \frac{Lh}{2} \cos(\omega t + \phi) \quad (3.3)$$

e la loro differenza all'istante  $t$  vale:

$$\Delta s = Lh \cos(\omega t) \quad (3.4)$$

Questo non permette di affermare in assoluto che gli specchi si muovano.

Per valutare la risposta dell'interferometro è dunque necessario comprendere bene in che modo la luce percorre le distanze nel campo gravitazionale.

Dal momento che la luce si muove a velocità finita, la distanza percorsa durante il volo in un braccio dell'interferometro non può essere espressa fissando un valore del tempo nella 3.3. Sottolineiamo che ciò che varia nel tempo non è tanto la posizione delle estremità dei bracci, quanto la lunghezza propria di ogni tratto che le collega, la quale oscilla con la frequenza  $f$  dell'onda gravitazionale. Questa grandezza deve essere integrata per tutto il tempo di volo -  $\tau \approx 2L/c$  - per ottenere il cammino totale di ciascuno dei due raggi. Se il tempo di volo si avvicina al periodo  $T = 1/f$  dell'onda gravitazionale, la lunghezza propria nei due bracci compie un'oscillazione quasi completa, ed entrambi i percorsi complessivi tendono ad approssimarsi al valor medio  $2L$ : la risposta dell'interferometro, proporzionale alla differenza di cammino nei due bracci, tende dunque a ridursi a zero.

La cosa è più facilmente quantificabile, oltre che meglio comprensibile a livello intuitivo, se si adotta il punto di vista del sistema di coordinate  $TT$ .

In questo sistema di riferimento, le coordinate spaziali degli specchi, e dunque le lunghezze spaziali dei due bracci, sono costanti nel tempo. Sono invece differenti le velocità con cui i raggi si muovono nelle due diverse direzioni. Ponendo  $ds = 0$  (la condizione che definisce le traiettorie della luce) nella

$$ds^2 = \left\{ 1 + h \cos \left[ \frac{\omega}{c}(z - ct) \right] \right\} dx^2 + \left\{ 1 - h \cos \left[ \frac{\omega}{c}(z - ct) \right] \right\} dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (3.5)$$

(eq. 2.59) si ricavano le velocità nelle rispettive direzioni di polarizzazione, sul piano  $z = 0$ :

$$\frac{dx}{dt} = c \left[ 1 - \frac{h}{2} \cos(2\pi ft) \right] \quad \frac{dy}{dt} = c \left[ 1 + \frac{h}{2} \cos(2\pi ft) \right] \quad (3.6)$$

Se i tempi di volo sono piccoli rispetto al periodo dell'onda, le variazioni del termine  $\cos(2\pi ft)$  durante l'intero tragitto possono essere trascurate. Essendo  $2L$  la lunghezza di entrambi i bracci, i due tempi di volo si scrivono come segue:

$$\tau_x \approx \frac{2L}{c} \left[ 1 - \frac{h}{2} \cos(2\pi ft) \right] \quad \tau_y \approx \frac{2L}{c} \left[ 1 + \frac{h}{2} \cos(2\pi ft) \right] \quad (3.7)$$

da cui si ricava la differenza di fase accumulata dai due raggi:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi c \Delta\tau}{\lambda} \approx \frac{4\pi Lh}{\lambda} \cos(2\pi ft) \approx \frac{4\pi \Delta s}{\lambda} \quad (3.8)$$

D'altra parte, per tempi di volo che si avvicinano al periodo dell'onda, le velocità dei raggi cambiano in modo rilevante durante il loro tragitto. Dal momento che entrambe fluttuano intorno allo stesso valore  $c$ , risulta che le rispettive velocità medie ed i conseguenti tempi di volo differiscono sempre meno; in questo modo la sensibilità del rivelatore risulta compromessa. Da questo si deduce che, per una data lunghezza dei bracci dell'interferometro, esiste una frequenza limite dell'onda gravitazionale, oltre la quale il rivelatore comincia a perdere la sua efficacia:

$$f_{\text{lim}} \approx \frac{c}{2L} \quad (3.9)$$

Per onde gravitazionali a frequenze ben inferiori alla frequenza limite, la risposta del rivelatore è la stessa; si ha dunque a che fare con un rivelatore a banda larga.

### 3.4 Virgo e la sua funzione di risposta

Virgo è un interferometro terrestre, situato a Cascina, un paese vicino a Pisa. È stato inaugurato ufficialmente nel luglio del 2003. È costituito da due bracci,

lunghe ciascuno tre chilometri, inclinati tra loro di un angolo di  $90^\circ$ . Teoricamente la sensibilità di Virgo va da circa 10 Hz a  $10^4$  Hz, ma come limite inferiore si può prendere 5 Hz, dato che, rispetto agli altri interferometri è più sensibile alle basse frequenze, cioè tra 5 e 10 Hz. Come ampiezza dell'onda gravitazionale arriva a "vedere" a più di  $10^{-22}$  tra  $10^2$  e  $10^3$  Hz. Purtroppo però questi valori sono solo teorici, perchè in pratica si è molto lontani da quella che è la sensibilità prevista. Per studiare le sue caratteristiche bisogna valutare quanto vale la sua funzione di risposta. Per farci consideriamo i cui bracci sono inclinati di un angolo  $\alpha$  uno rispetto all'altro. Supponiamo di essere in un sistema di riferimento  $XYZ$  e che l'onda arrivi lungo l'asse  $Z$  con direzione  $(\theta, \phi)$ . Il sistema di riferimento dell'onda è  $x, y, z$ .

Il tensore di detezione (detector tensor) è definito come  $D^{ab} \equiv \frac{1}{2}(\hat{v}^a \hat{v}^b - \hat{u}^a \hat{u}^b)$ , dove  $\hat{v}^a$  e  $\hat{u}^b$  sono i versori lungo le direzioni dei bracci dell'interferometro. Il segnale  $s(t)$  è dato da:

$$s(t) \equiv \frac{\delta L_u(t) - \delta L_v(t)}{L} \equiv D^{ab} h_{ab}(t) \quad (3.10)$$

$h_{ab}$  è definito nel seguente modo:

$$h_{ab} = h_{ab}^+(t - z) + h_{ab}^\times(t - z) = h^+(t - z)e_{ab}^+ + h^\times(t - z)e_{ab}^\times \quad (3.11)$$

in cui  $e_{ab}^+$  e  $e_{ab}^\times$  indicano:

$$\begin{aligned} e_{ab}^+ &= \hat{x}_a \hat{x}_b - \hat{y}_a \hat{y}_b \\ e_{ab}^\times &= \hat{x}_a \hat{x}_b + \hat{y}_a \hat{y}_b \end{aligned} \quad (3.12)$$

dove  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  sono tre versori mutuamente ortogonali. Le coordinate sono:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= (1, 0, 0) \\ \hat{v} &= (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Perciò se si considera l'onda proveniente dalla direzione dell'asse  $z$ , che è perpendicolare al piano dove si trovano i due bracci, possiamo scrivere le coordinate nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (-\sin \theta \cos \phi, -\sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \hat{y} &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \\ \hat{z} &= (-\cos \theta \cos \phi, -\cos \theta \sin \phi, \sin \theta) \end{aligned} \quad (3.14)$$

In questo caso avremo:

$$\hat{\Omega} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} + \sin \theta \hat{z} \quad (3.15)$$

Ponendo  $\vec{x} = 0$ , che equivale a porre il ricevitore al centro del sistema di riferimento, si ottiene:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_A \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{S^2} d\hat{\Omega} \tilde{h}_A(\omega, \hat{\Omega}) e^{i\omega t} D^{ab} e_{ab}^A(\hat{\Omega}) \quad (3.16)$$

nel dominio delle frequenze l'equazione corrispondente è:

$$\tilde{S}(\omega) = D^{ab} \tilde{h}_{ab}(\omega) \quad (3.17)$$

che può essere riscritta nel modo seguente:

$$\int_{S^2} d\hat{\Omega} \tilde{h}_A(\omega, \hat{\Omega}) D^{ab} e_{ab}^A(\hat{\Omega}) \quad (3.18)$$

La quantità:

$$F^A(\Omega) \equiv D^{ab} e_{ab}^A(\hat{\Omega}) = Tr\{De\} \quad (3.19)$$

è chiamata *detector pattern*.

A questo punto valutiamo quanto vale

$$\begin{aligned} D^{ab} h_{ab}(t) &= D^{11} h_{11}(t) + D^{22} h_{22}(t) + D^{33} h_{33}(t) \\ &+ 2D^{12} h_{12}(t) + 2D^{13} h_{13}(t) + 2D^{23} h_{23}(t) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{v}^1 \hat{v}^1 - \hat{u}^1 \hat{u}^1) h_{11}(t) + \frac{1}{2}(\hat{v}^2 \hat{v}^2 - \hat{u}^2 \hat{u}^2) h_{22}(t) \\ &+ \frac{1}{2}(\hat{v}^3 \hat{v}^3 - \hat{u}^3 \hat{u}^3) h_{33}(t) + (\hat{v}^1 \hat{v}^2 - \hat{u}^1 \hat{u}^2) h_{12}(t) \\ &+ (\hat{v}^1 \hat{v}^3 - \hat{u}^1 \hat{u}^3) h_{13}(t) + (\hat{v}^2 \hat{v}^3 - \hat{u}^2 \hat{u}^3) h_{23}(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Alcuni valori risultano nulli, e sostituendo otteniamo:

$$\frac{1}{2}(\cos^2 \alpha - 1) h_{11}(t) + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha h_{22}(t) + \sin \alpha \cos \alpha h_{12}(t) \quad (3.21)$$

Sostituiamo ad  $h$  la sua espressione in cui è presente  $e_{ab}^+$  e  $e_{ab}^\times$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\cos^2 \alpha - 1) (h^+ e_{11}^+ + h^\times e_{11}^\times) + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha (h^+ e_{22}^+ + h^\times e_{22}^\times) \\ &+ \sin \alpha \cos \alpha (h^+ e_{12}^+ + h^\times e_{12}^\times) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ora ad e sostituiamo l'espressione con x e y e si ottiene:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\cos^2 \alpha - 1) [h^+(\hat{x}_1\hat{x}_1 - \hat{y}_1\hat{y}_1) + h^\times(\hat{x}_1\hat{x}_1 + \hat{y}_1\hat{y}_1)] \\
&+ \frac{1}{2}\sin^2 \alpha [h^+(\hat{x}_2\hat{x}_2 - \hat{y}_2\hat{y}_2) + h^\times(\hat{x}_2\hat{x}_2 + \hat{y}_2\hat{y}_2)] \\
&+ \sin \alpha \cos \alpha [h^+(\hat{x}_1\hat{x}_2 - \hat{x}_1\hat{y}_2) + h^\times(\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{y}_1\hat{x}_2)]
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Ora sostituiamo le coordinate di x e y e si ha:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\cos^2 \alpha - 1) [h^+(\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + h^\times(2 \sin \theta \sin \phi \cos \phi)] \\
&+ \frac{1}{2}\sin^2 \alpha [h^+(\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + h^\times(-2 \sin \theta \sin \phi \cos \phi)] \\
&+ \sin \alpha \cos \alpha [h^+(1 + \sin^2 \theta) \sin \phi \cos \phi + h^\times \sin \theta (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi)]
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Questi calcoli sono generali, valgono per qualsiasi interferometro composto da due bracci di lunghezza  $L$  inclinati di un angolo  $\alpha$ . Per fare il caso specifico di Virgo, bisogna sostituire il valore di  $\alpha$  con  $90^\circ$ , e si ottiene così la funzione  $F(\Omega)$  per Virgo.

$$\begin{aligned}
F^+(\Omega) &= \frac{1}{2}(1 + \sin^2 \theta) \cos 2\phi \\
F^\times(\Omega) &= -\sin \theta \sin
\end{aligned} \tag{3.25}$$

L'equazione 3.25 non è, purtroppo, l'espressione più generale per il detector pattern, ma ne è la sua approssimazione nell'ipotesi in cui l'onda incidente abbia una lunghezza d'onda  $\lambda$  molto maggiore delle dimensioni lineari  $L$  del rivelatore. In questo caso, infatti, il rivelatore può essere considerato puntiforme rispetto all'onda incidente: l'onda viene vista come congelata al valore  $h_0$ .

Per calcolare il detector pattern nel caso in cui non sia più valida l'approssimazione  $\lambda \gg L$ , bisogna ripartire dall'equazione 3.5 riscritta per una generica onda gravitazionale (metrica perturbata):

$$ds^2 = -dt^2 + [\delta_{ab} + h_{ab}(t - z)] dx^a dx^b \tag{3.26}$$

Per la polarizzazione + scriviamo la 3.26 così

$$ds^2 = -dt^2 + [1 + h^+(t - z)] dx^2 + [1 - h^\times(t - z)] dy^2 + dz^2 \tag{3.27}$$

Le coordinate dei bracci rispetto al sistema di riferimento dell'onda sono:

$$\begin{aligned}
u &= (-x \sin \theta \cos \phi - y \sin \phi - z \cos \theta \cos \phi) \\
v &= (-x \sin \theta \sin \phi + y \cos \phi - z \cos \theta \sin \phi) \\
w &= (x \cos \theta - z \sin \theta)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

mentre trasformandole per il sistema di riferimento  $xyz$  si ha:

$$\begin{aligned}
x &= (-u \sin \theta \cos \phi - v \sin \theta \sin \phi + w \cos \theta) \\
y &= (-u \sin \phi + v \cos \phi) \\
z &= (-u \cos \theta \cos \phi - v \cos \theta \sin \phi - w \cos \theta)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

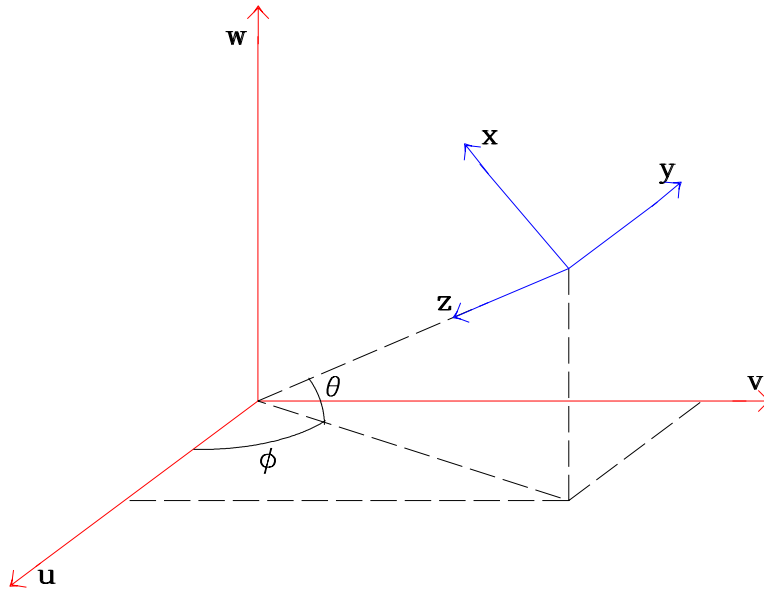


Figura 3.1: Sistema di riferimento per un onda che arriva in una generica direzione.

Il tensore metrico può essere scritto:

$$g_{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} g'^{lm} \tag{3.30}$$

Utilizzando l'eq. 3.28, 3.29, 3.30, l'eq 3.26 diventa, nella direzione  $u$ :

$$ds^2 = -dt^2 + \left[ 1 + (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi) h^+(t - u \cos \theta \cos \phi) \right] du^2 \tag{3.31}$$



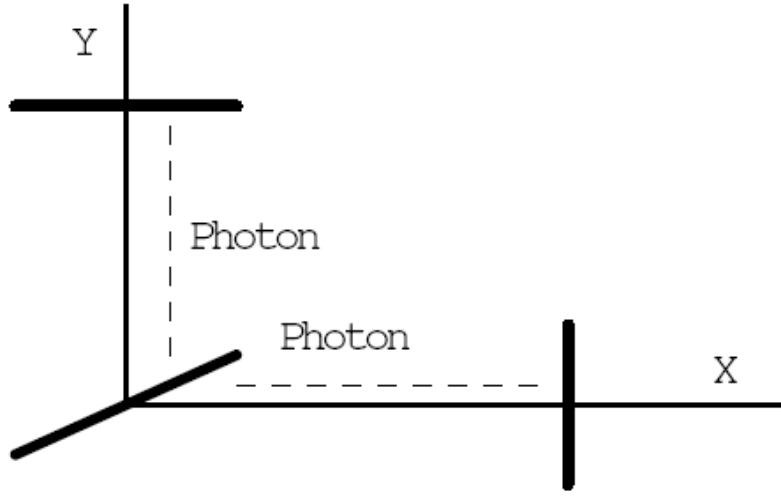


Figura 3.2:

Ricordando il percorso compiuto dal fotone, che può essere visto in figura 3.2, si può passare al calcolo della sua velocità coordinata, ponendo  $ds^2 = 0$ :

$$v^2 \equiv \left( \frac{du}{dt} \right) = \frac{1}{\left[ 1 + (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi) h^+(t - u \cos \theta \cos \phi) \right]} \quad (3.32)$$

Ponendo il beam-splitter nell'origine, perciò  $u_b = v_b = w_b = 0$ , quindi si avrà  $u_b = 0$  e  $u_m = L$ , dove l'ultima è la coordinata dello specchio. La durata del viaggio è quindi:

$$T_1(t) = \int_0^L \frac{du}{v(t' - u \cos \theta \cos \phi)} \quad (3.33)$$

dove  $t' = t - (L - u)$  indica il tempo di ritardo, dato che  $t$  è il tempo in cui il fotone ci mette ad arrivare nella posizione  $L$ . al primo ordina, per  $h$  si può approssimare quest'integrale con:

$$T_1(t) = T + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi}{2} \int_0^L h^+(t' - u \cos \theta \cos \phi) du \quad (3.34)$$

dove  $T = L$  dato che si lavora in unità naturali. Il tempo del viaggio di ritorno sarà molto simile:

$$T_2(t) = T + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi}{2} \int_L^0 h^+(t' - u \cos \theta \cos \phi) (-du) \quad (3.35)$$

dove questa volta il tempo di ritardo è  $t' = t - (u - l)$ .

Il tempo totale sarà la somma del tempo  $T_2(t)$  e  $T_1(t - T_2(t))$ . Questo può essere approssimato come  $T_1(t - T)$  perché la differenza tra il valore esatto e quello approssimato è del secondo ordina per  $h^+$ .

Perciò si può scrivere il tempo proprio di viaggio, al primo ordine, nel seguente modo:

$$T_{r,t}(t) = T_2(t) + T_1(t - T). \quad (3.36)$$

Attraverso le equazioni 3.34 e 3.35 si ottiene la variazione del tempo proprio totale:

$$\begin{aligned} \delta T(t) = & \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi}{2} \int_L^0 \left[ h^+(t - 2T + u(1 - \cos \theta \cos \phi)) \right. \\ & \left. + h^+(t - u(1 + \cos \theta \cos \phi)) \right] du \end{aligned} \quad (3.37)$$

Facciamo ora la trasformata di Fourier per la polarizzazione +:

$$\tilde{h}^+(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt h^+(t) \exp\{i\omega t\} \quad (3.38)$$

Quindi nel dominio delle frequenza  $\delta T$  vale:

$$\delta \tilde{T}(\omega) = (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \tilde{H}_u(\omega, \phi, \theta) \tilde{h}^+\omega \quad (3.39)$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{H}_u(\omega, \phi, \theta) = & \frac{-1 + \exp\{2i\omega L\}}{2i\omega(1 - \cos^2 \theta) \cos^2 \phi} \\ & + \frac{\cos \theta \cos \phi [(1 + \exp\{2i\omega L\}) - 2 \exp\{i\omega L\} (1 + \cos \theta \cos \phi)]}{2i\omega(1 - \cos^2 \theta) \cos^2 \phi} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Se  $\omega \rightarrow 0$  allora  $\tilde{H}_u(\omega, \phi, \theta) \rightarrow L$ . Quindi, la funzione di risposta totale del braccio dell'interferometro nella direzione  $u$  della componente + dell'onda gravitazionale è data da:

$$\Psi_u^+(\omega, \phi, \theta) = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi}{2L} \tilde{H}_u(\omega, \phi, \theta) \quad (3.41)$$

dove  $2L = 2T$ . e indica il tempo di viaggio in assenza di onda gravitazionale. Ora facciamo le stesse valutazione per la direzione  $v$ . Questa volta avremo:

$$ds^2 = -dt^2 + \left[1 + (\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi)h^+(t - u \cos \theta \cos \phi)\right] du^2 \quad (3.42)$$

mentre la funzione di risposta per il braccio  $v$  dell'interferometro per la polarizzazione  $+$  sarà:

$$\Psi_v^+(\omega, \phi, \theta) = \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi - \cos^2 \phi}{2L} \tilde{H}_v(\omega, \phi, \theta) \quad (3.43)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{H}_u(\omega, \phi, \theta) &= \frac{-1 + \exp\{2i\omega L\}}{2i\omega(1 - \cos^2 \theta) \sin^2 \phi} \\ &+ \frac{\cos \theta \sin \phi [(1 + \exp\{2i\omega L\}) - 2 \exp\{i\omega L\} (1 + \cos \theta \sin \phi)]}{2i\omega(1 - \cos^2 \theta) \sin^2 \phi} \end{aligned} \quad (3.44)$$

anche per questa componente si vede subito che se  $\omega \rightarrow 0$  allora  $\tilde{H}_u(\omega, \phi, \theta) \rightarrow L$ .

Quindi la risposta totale, cioè il detector pattern dell'interferometro Virgo per la polarizzazione  $+$  dell'onda gravitazionale è:

$$\begin{aligned} \tilde{H}^+(\omega, \phi, \theta) &= \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi}{2L} \tilde{H}_u(\omega, \phi, \theta) - \\ &\frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi - \cos^2 \phi}{2L} \tilde{H}_v(\omega, \phi, \theta) \end{aligned} \quad (3.45)$$

e al limite delle basse frequenze, quindi per  $\omega \rightarrow 0$  si riottiene l'equazione 3.25:

$$\tilde{H}^+(\omega \rightarrow 0) = \frac{1}{2}(1 + \sin^2 \theta) \cos 2\phi \quad (3.46)$$

Di seguito si riporta il grafico del valore assoluto di questa quantità in funzione della frequenza.

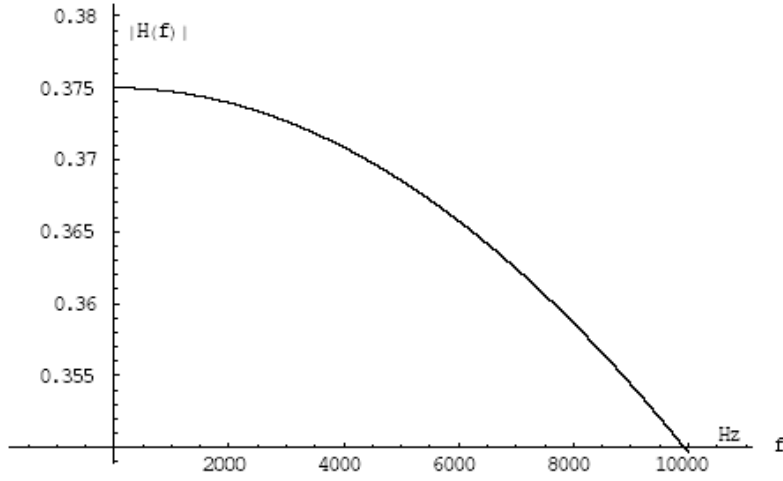


Figura 3.3: Valore assoluto della risposta totale di Virgo in funzione della polarizzazione + della onde gravitazionali per  $\theta = \pi/4$  e  $\phi = \pi/3$

Vediamo ora di valutare le stesse quantità per la polarizzazione  $\times$ . Nella direzione  $u$  si avrà:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2h^\times(t - z)dx dy \quad (3.47)$$

e di nuovo calcolando nel nuovo sistema di riferimento, usando le 3.29:

$$ds^2 = -dt^2 + [(1 - 2 \sin \theta \sin \phi \cos \phi)h^\times(t - u \cos \theta \cos \phi)]du^2 \quad (3.48)$$

e analogamente alla precedente si ottiene:

$$\Psi_u^\times(\omega) = \frac{-\sin \theta \sin \phi \cos \phi}{L} \tilde{H}_u(\omega, \phi, \theta) \quad (3.49)$$

Per la direzione  $v$  si ha:

$$ds^2 = -dt^2 + [(1 + 2 \sin \theta \sin \phi \cos \phi)h^\times(t - u \cos \theta \cos \phi)]du^2 \quad (3.50)$$

e analogamente si ottiene:

$$\Psi_v^\times(\omega) = \frac{\sin \theta \sin \phi \cos \phi}{L} \tilde{H}_v(\omega, \phi, \theta) \quad (3.51)$$

Quindi, facendo gli stessi passaggi visti in precedenza si ottiene il detector pattern di un interferometro come Virgo, per la polarizzazione  $x$  dell'onda gravitazionale:

$$\tilde{H}^\times(\omega) = \frac{-\sin\theta \sin\phi \cos\phi}{L} [\tilde{H}_u(\omega, \phi, \theta) + \tilde{H}_v(\omega, \phi, \theta)] \quad (3.52)$$

Anche qui viene riscritto considerando il limite delle basse frequenze, riottenendo il risultato dell'equazione 3.25, che ci si aspettava. Quindi per  $\omega \rightarrow 0$ , si ottiene:

$$\tilde{H}^\times(\omega \rightarrow 0) = -\sin\theta \sin 2\phi \quad (3.53)$$

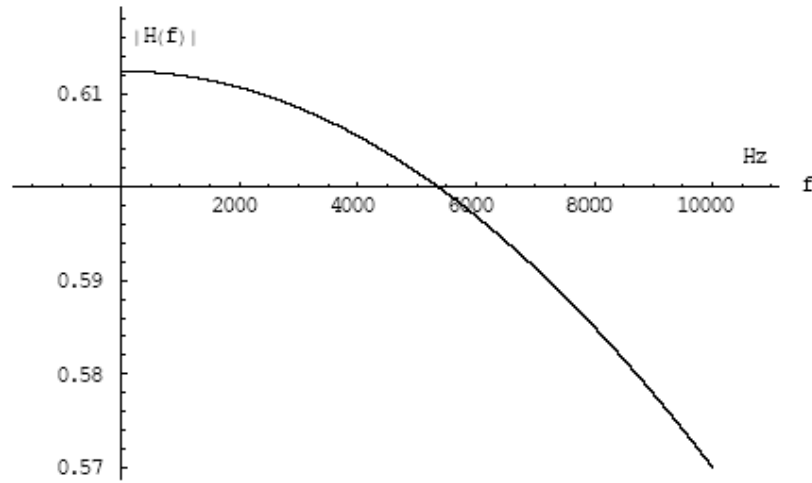


Figura 3.4: Valore assoluto della risposta totale di Virgo in funzione della polarizzazione  $\times$  della onde gravitazionali per  $\theta = \pi/4$  e  $\phi = \pi/3$

### 3.5 LISA

L'emissione delle onde gravitazionali è stata predetta da Einstein e verificata, al di là di ogni dubbio, dalla perdita di energia della pulsar binaria PSR B1913+16.

LISA sarà il primo osservatorio di alta sensibilità di onde gravitazionali nello spazio. Nella sua banda di frequenza  $10^{-4} \leq \omega \leq 10^{-1}$  Hz sono previste almeno 18 sorgenti, sistemi binari nella nostra galassia, note con tutti i loro parametri. L'esistenza di queste sorgenti di calibrazione, unita alla possibilità

di "spegnere" il segnale per calibrare il rumore dello strumento, fa di LISA uno strumento a parte nel panorama delle onde gravitazionali passando da un approccio di ricerca ad uno di osservazione.

In aggiunta a queste sorgenti, LISA vedrà tutti i sistemi binari costituiti da nane bianche compatte o da stelle di neutroni, fornendone inclinazione ed orientazione. LISA produrrà così una mappa delle binarie nella Galassia ed oltre, fornendo importanti informazioni sulla formazione delle stelle e sulle binarie esotiche che non si vedono con metodi elettromagnetici.

Fra le sorgenti più spettacolari ci sono quelle che coinvolgono i buchi neri super-massivi, che si ritiene, e con elevata confidenza, occupino il nucleo della gran parte delle galassie. I "mergers" di galassie implicano dunque i "mergers" dei corrispondenti buchi neri, un fenomeno che produce un'intensa emissione di onde gravitazionali osservabili da LISA con elevatissimo rapporto segnale rumore, dovunque esso avvenga nell'Universo. Le previsioni teoriche dicono che LISA dovrebbe osservare alcuni di questi eventi all'anno. Queste osservazioni permetterebbero test di elevata precisione sulla gravità. Inoltre essi costituirebbero candele standard fornendo una scala indipendente luminosità-distanza valida a distanze cosmologiche. Infine, il merger di proto-galassie a grandi redshifts darebbero informazione sull'età oscura dell'Universo, l'epoca della formazione dei buchi neri super massivi. Infine, le onde gravitazionali emesse da oggetti di massa stellare che cadono in un buco nero supermassivo, forniscono una mappa dettagliata dell'orizzonte degli eventi del buco-nero. Questo fornirebbe l'unica dimostrazione diretta che l'oggetto al centro della galassia è un buco nero. LISA dovrebbe osservare numerosi di questi eventi misurando con precisione i parametri dei buchi neri e consentendo di inferirne la popolazione e l'evoluzione. Ovviamente questa lista di sorgenti non copre il potenziale di scoperta che un metodo di osservazione interamente nuovo ha sempre portato con sé. La storia dell'astronomia insegna che i segnali più interessanti rivelati da un nuovo metodo di osservazione non sono mai stati realmente previsti prima dell'effettuazione dell'esperimento. LISA dunque ha come obiettivo quello di ottenere la maggiore sensibilità e la più grande gamma di frequenze di osservazione raggiungibili tecnicamente in un ragionevole inviluppo finanziario e programmatico.

LISA consiste di una costellazione di 3 satelliti in orbite eliocentriche. I

tre satelliti seguono orbite eliocentriche indipendenti con i parametri dell'orbita aggiustati in maniera tale che le distanze fra i satelliti rimangono costanti 1% a  $5 \times 10^6$  km. Le orbite sono aggiustate in modo tale che i tre satelliti mantengano una formazione a triangolo equilatero con un lato di 5106 km senza necessità di manovre di aggiustamento. Ogni satellite contiene una coppia di masse di prova, di circa 2 kg, nominalmente in moto puramente geodetico, ossia in caduta libera. Ogni massa di prova è lo specchio terminale di un interferometro a singolo braccio, l'altro specchio dello stesso interferometro trovandosi in un diverso satellite.

Due interferometri di Michelson semi-indipendenti si possono formare combinando i segnali dei tre bracci. La sensibilità di LISA è massima per onde gravitazionali di ampiezza  $|h| = 4 \times 10^{-21}$  e frequenza  $\omega = 10^{-3}$  Hz, con una banda di sensibilità utile fra 0.1 mHz e 1 Hz.

L'elemento dell'interferometro laser fondamentale di LISA è il sistema di controllo a 19 gradi di libertà per satellite, che costringe il satellite a seguire le masse di prova ed allinearsi sui fasci laser. I principali costituenti di questo sistema sono:

- a) dei sensori capacitivi di spostamento delle massa di prova rispetto al satellite. Questi sensori non hanno contatto con la massa di prova e rivelano il moto in tutti e 6 gradi di libertà;
- b) dei sensori ottici di allineamento dei fasci capaci di rivelare se il satellite ha ruotato rispetto al fascio laser inviato da un altro dei satelliti;
- c) Dei micropropulsori (Field Emission Electric Propulsion o FEEP) capaci di spinte lineari.

I propulsori sono comandati in un anello di controllo dai segnali provenienti dai sensori di spostamento. L'anello di controllo tiene il satellite centrato sulle masse di prova, lungo le direzioni dei fasci laser, a meglio di  $2.5 \text{ nm Hz}^{-1}$ .

Lungo i gradi di libertà diversi da quello dello spostamento lungo la direzione del fascio laser, l'anello di controllo costringe le masse di prova a seguire il satellite attraverso delle forze elettriche generate dagli stessi elettrodi che servono a rivelare la posizione della massa stessa.

Questo sistema di controllo, noto come sistema “drag-free”, è uno degli elementi determinanti su cui l’Italia ha la leadership all’interno della collaborazione. Le prestazioni di LISA, e di molte altre missioni in Fisica Fondamentale sono limitate, alle basse frequenze dalla capacità di ottenere una situazione di pura caduta libera di un insieme di masse di prova. Per LISA, ad esempio, le masse di prova devono muoversi nello spazio soggette all’azione della pura gravitazione entro un rumore di accelerazione di  $3 \times 10^{-15} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{(1/2)}$  a frequenze fra 0.1 e 3 mHz.

Un ingrediente essenziale per ottenere questo tipo di prestazioni è la tecnica di costringere il satellite ad inseguire la massa di prova senza toccarla, agendo così da schermo verso le perturbazioni che vengono dallo spazio esterno, pressione di radiazione, vento solare ecc., ma senza indurre ulteriori perturbazioni. In questa tecnica il sensore di spostamento, generalmente chiamato il sensore inerziale (o gravitazionale), misura lo spostamento del satellite ed il segnale viene mandato ad i micropropulsori per costringere il satellite ad inseguire la massa di prova.

Il sensore è un elemento essenziale di questa tecnologia. Esso deve misurare gli spostamenti con elevata precisione senza esercitare forze di disturbo sulla massa di prova. I campi gravitazionali, magnetici ed elettrici vanno controllati a precisioni compatibili con la prestazione sopra indicate. La natura delle superfici, i potenziali elettrici parassiti, la simmetria gravitazionale sono gli elementi determinati per ottenere queste prestazioni. Nel 2001 l’ESA ha deciso di utilizzare la sua missione tecnologica SMART-2, per il test degli elementi tecnologici critici di LISA.

L’elemento che è necessario testare in volo, perché non testabile a terra, è la capacità di mettere delle masse di prova in pura caduta libera all’interno di un satellite, in particolare senza alcun contatto meccanico con il satellite stesso, al livello di precisione richiesto dalle masse di prova di LISA. Questo test include il test del drag-free. Il drag-free è stato dimostrato nello spazio ma non ai livelli di precisione richiesti qui. Il test in volo consiste sostanzialmente nel contrarre la lunghezza di uno dei bracci di LISA da 5 milioni di chilometri a poche decine di centimetri in modo da poterlo ospitare sullo stesso satellite. Questo sistema compatto è costituito quindi da due sensori inerziali e da un interferometro laser che legge la posizione relativa delle due masse di prova. Il sistema è denominato



in Europa il LISA Technology Package (LTP).

### 3.6 La funzione di risposta di LISA

Si è detto che LISA è un interferometro spaziale a tre bracci. Supponiamo che ( si veda la figura 3.5 per i dettagli) LISA si trovi nel piano  $uv$  di un sistema di riferimento  $uvw$ . L'onda gravitazionale arriva con un certo angolo al piano di LISA e il suo sistema di riferimento proprio è  $xyz$ .

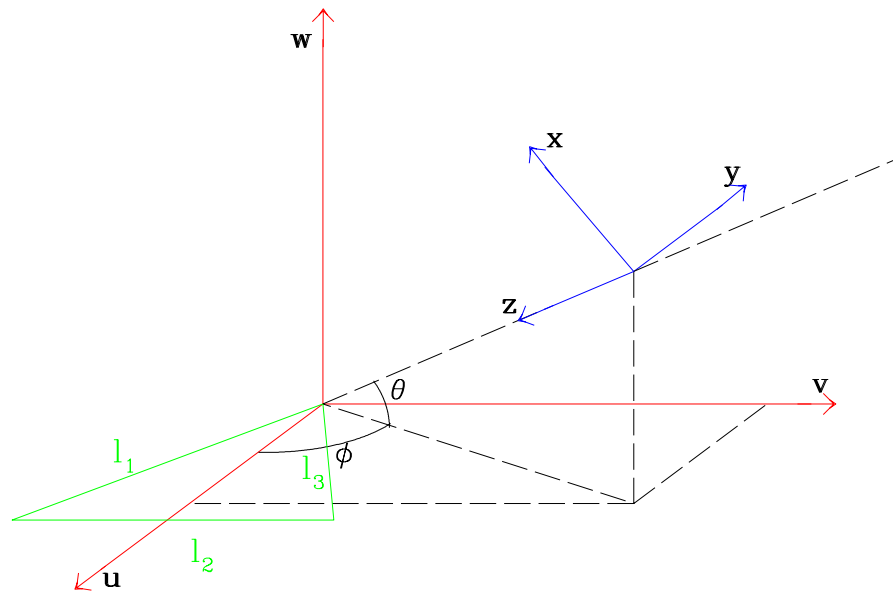


Figura 3.5: LISA, in verde, ha come sistema di riferimento proprio il sistema cartesiano di coordinate  $uvw$ , in rosso, e giace nel piano  $uv$ . L'onda arriva con direzione perpendicolare a LISA e il suo sistema proprio di riferimento è  $xyz$ , in blu.

La particolare geometria di LISA consente di avere non un unico interferometro con una configurazione fissa, ma diversi interferometri ognuno dei quali con la propria configurazione. Il caso più semplice è una configurazione a due bracci, con un angolo di  $60^\circ$  tra di loro.

Consideriamo la configurazione che si ottiene combinando i bracci 1 e 3 (cfr 3.5) di LISA, inclinati rispettivamente di  $-30^\circ$  e  $+30^\circ$  rispetto all'asse  $u$

del sistema di riferimento di LISA. I versori lungo le direzioni dei due bracci considerati saranno quindi:

$$\begin{aligned}
l_1 &= (\cos(-30^\circ), \sin(-30^\circ), 0) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right) \\
l_3 &= (\cos(+30^\circ), \sin(+30^\circ), 0) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Nel sistema di riferimento dell'onda, invece, i due bracci considerati hanno le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned}
l_1 &= \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos \phi - \frac{1}{2} \sin \theta \sin \phi, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \phi - \frac{1}{2} \cos \phi, \right. \\
&\quad \left. -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \cos \phi + \frac{1}{2} \cos \theta \sin \phi \right) \\
l_3 &= \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos \phi + \frac{1}{2} \sin \theta \sin \phi, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \phi + \frac{1}{2} \cos \phi, \right. \\
&\quad \left. -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \cos \phi - \frac{1}{2} \cos \theta \sin \phi \right)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Conseguentemente, le componenti della la matrice di risposta  $D_{ab}$  risultano:

$$\begin{aligned}
D^{11} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2 \theta \sin 2\phi \\
D^{22} &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\phi \\
D^{12} &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \sin \theta \cos 2\phi
\end{aligned} \tag{3.56}$$

e lo strain  $s(t)$  risulta essere:

$$s(t) = \left[ \frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2 \theta \sin 2\phi - \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\phi \right) \right] h^+(t-z) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos 2\phi h^\times(t-z) \tag{3.57}$$

mentre, nello spazio delle frequenze, lo strain risulta:

$$\tilde{s}(\omega) = \left[ \frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2 \theta \sin 2\phi - \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\phi \right) \right] \tilde{h}^+(\omega) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos 2\phi \tilde{h}^\times(\omega) \quad (3.58)$$

quindi le due componenti dello strain risultano essere:

$$\begin{aligned} F^+(\Omega) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\phi (1 + \sin^2 \theta) \\ F^\times(\Omega) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos 2\phi \end{aligned} \quad (3.59)$$

Anche in questo caso le equazioni 3.59 rappresentano l'approssimazione del detector pattern sotto la condizione  $\lambda \gg L$ . Per calcolare il detector pattern nel caso generale, bisogna ripartire, analogamente a quanto visto per Virgo, dalla metrica perturbata:

$$ds^2 = -dt^2 + [\delta_{ab} + h_{ab}(t-z)] dx^a dx^b$$

(equazione: 3.26) Per la polarizzazione + scriviamo la 3.26 così:

$$ds^2 = -dt^2 + [1 + h^+(t-z)] dx^2 + [1 - h^\times(t-z)] dy^2 + dz^2$$

(equazione 3.27) la quale, riscritta per un fotone che si propaga lungo il braccio  $l_1$ :

$$ds^2 = -dt^2 + \left\{ 1 + \frac{1}{4} h^+(t-z) [(-\sqrt{3} \sin 2\phi + \cos 2\phi)(1 + \sin^2 \theta) - 2 \cos^2 \theta] \right\} dl_1^2 \quad (3.60)$$

che riscriviamo, per comodità, in questo modo:

$$ds^2 = -dt^2 + \left\{ 1 + F_1^+(\phi, \theta) h^+(t-z) \right\} dl_1^2 \quad (3.61)$$

avendo posto

$$F_1^+(\phi, \theta) = \frac{1}{4} [(-\sqrt{3} \sin 2\phi + \cos 2\phi)(1 + \sin^2 \theta) - 2 \cos^2 \theta] \quad (3.62)$$

La velocità con cui il fotone percorre le coordinate lungo il braccio  $l_1$  risulta:

$$v^2 = \left( \frac{dl_1}{dt} \right)^2 = \frac{1}{1 + F_1^+(\phi, \theta) h^+(t - z)} \quad (3.63)$$

Il tempo di transito lungo il braccio  $l_1$  è quindi dato da:

$$T_1(t) = \int_0^L \frac{dl_1}{v \left( t' + \frac{1}{2} l_1 \cos \theta \left( \sqrt{3} \cos \phi - \sin \phi \right) \right)} \quad (3.64)$$

(cfr. 3.33). tenendo presente che il tempo di ritardo è ora  $t' = t - l_1$ , il tempo di transito ora risulta essere:

$$T_1(t) = T - \frac{1}{2} F_1^+(\phi, \theta) \times \int_0^L dl_1 h^+ \left( t - l_1 \left[ 1 - \frac{1}{2} \cos \theta \left( \sqrt{3} \cos \phi - \sin \phi \right) \right] \right) \quad (3.65)$$

Analogamente, il tempo del viaggio di ritorno sarà:

$$T_2(t - T_1(t)) = T - \frac{1}{2} F_1^+(\phi, \theta) \times \int_L^0 dl_1 h^+ \left( t - 2L + l_1 \left[ 1 - \frac{1}{2} \cos \theta \left( \sqrt{3} \cos \phi - \sin \phi \right) \right] \right) \quad (3.66)$$

dove ancora il tempo di ritardo è  $t' = t - 2L + l_1$ . Il tempo totale è dato dalla somma del tempo  $T_1(t) + T_2(t - L)$ . Conseguentemente, il ritardo dovuto alla presenza dell'onda gravitazionale è:

$$\delta T(t) = -\frac{1}{2} F_1^+(\phi, \theta) \times \int_0^L dl_1 \left\{ h^+ \left( t - l_1 \left[ 1 - \frac{1}{2} \cos \theta \left( \sqrt{3} \cos \phi - \sin \phi \right) \right] \right) + h^+ \left( t - 2L + l_1 \left[ 1 - \frac{1}{2} \cos \theta \left( \sqrt{3} \cos \phi - \sin \phi \right) \right] \right) \right\} \quad (3.67)$$

Utilizzando ancora l'equazione 3.38 nel dominio delle frequenze  $T$ , vale:

$$\delta \tilde{T}(\omega) = -\frac{1}{2} F_1^+(\phi, \theta) \tilde{H}_{l_1}(\omega, \phi, \theta) \tilde{h}^+(\omega) \quad (3.68)$$

dove:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{l_1}(\omega, \phi, \theta) = & \frac{i \exp\{i\omega L\}}{\omega} \left\{ \exp\{i\omega L\} - \exp \left\{ i\omega L \frac{\cos\theta}{2} (\sqrt{3} \cos \phi - \sin \phi) \right\} \right\} \times \\ & \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\cos\theta}{2} (\sqrt{3} \cos \phi - \sin \phi)} - \frac{1}{1 + \frac{\cos\theta}{2} (\sqrt{3} \cos \phi - \sin \phi)} \right\} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Quindi, la funzione di risposta totale del braccio  $l_1$  dell'interferometro per la componente + dell'onda gravitazionale è data da:

$$\Psi_{l_1}^+(\omega) = \frac{-F_1^+(\phi, \theta)}{4L} \tilde{H}_{l_1}(\omega, \phi, \theta) \quad (3.70)$$

Analogamente, per quanto riguarda il braccio  $l_3$  conti simili portano alla seguente espressione per la risposta alla polarizzazione + dell'onda incidente:

$$\Psi_{l_3}^+(\omega) = \frac{-F_3^+(\phi, \theta)}{4L} \tilde{H}_{l_3}(\omega, \phi, \theta) \quad (3.71)$$

in cui  $F_3^+(\phi, \theta)$  è ha la seguente espressione:

$$F_3^+(\phi, \theta) = \frac{1}{4} [(\sqrt{3} \sin 2\phi + \cos 2\phi)(1 + \sin^2 \theta) - 2 \cos^2 \theta] \quad (3.72)$$

mentre per  $\tilde{H}_{l_3}(\omega, \phi, \theta)$  risulta,:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{l_3}(\omega, \phi, \theta) = & \frac{i \exp\{i\omega L\}}{\omega} \left\{ \exp\{i\omega L\} - \exp \left\{ i\omega L \frac{\cos\theta}{2} (\sqrt{3} \cos \phi + \sin \phi) \right\} \right\} \times \\ & \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\cos\theta}{2} (\sqrt{3} \cos \phi + \sin \phi)} - \frac{1}{1 + \frac{\cos\theta}{2} (\sqrt{3} \cos \phi + \sin \phi)} \right\} \end{aligned} \quad (3.73)$$

La risposta totale della configurazione a due bracci 1-3 di LISA, per la polarizzazione +, è quindi data da:

$$\begin{aligned} \Psi^+(\omega) &= \Psi_{l_3}^+(\omega) - \Psi_{l_1}^+(\omega) = \\ &= \frac{F_3^+(\phi, \theta)}{4L} \tilde{H}_{l_3}(\omega, \phi, \theta) - \frac{F_1^+(\phi, \theta)}{4L} \tilde{H}_{l_1}(\omega, \phi, \theta) \end{aligned} \quad (3.74)$$

La risposta alla polarizzazione  $\times$  si ottiene con conti analoghi ai precedenti. Tralasciando di riportare ancora i dettagli, a questo punto inutili, la risposta complessiva è data da:

$$\begin{aligned}\Psi^\times(\omega) &= \Psi_{l_3}^\times(\omega) - \Psi_{l_1}^\times(\omega) = \\ &= \frac{F_3^\times(\phi, \theta)}{4L} \tilde{H}_{l_3}(\omega, \phi, \theta) - \frac{F_1^\times(\phi, \theta)}{4L} \tilde{H}_{l_1}(\omega, \phi, \theta)\end{aligned}\quad (3.75)$$

In cui  $\tilde{H}_{l_1}(\omega, \phi, \theta)$  e  $\tilde{H}_{l_3}$  sono le medesime funzioni ricavate per la polarizzazione  $+$ , mentre  $F_1^\times(\phi, \theta)$  e  $F_3^\times(\phi, \theta)$  sono dati da:

$$\begin{aligned}F_1^\times(\phi, \theta) &= \frac{\sin \theta}{2} (\sin 2\phi + \sqrt{3} \cos 2\phi) \\ F_3^\times(\phi, \theta) &= \frac{\sin \theta}{2} (\sin 2\phi - \sqrt{3} \cos 2\phi)\end{aligned}\quad (3.76)$$

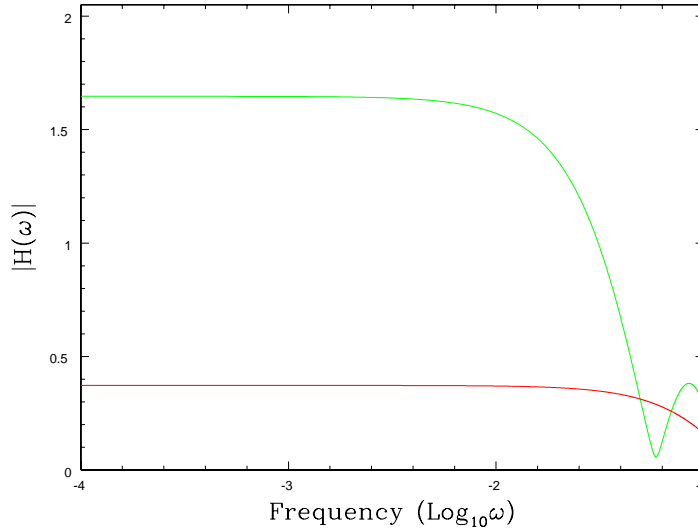


Figura 3.6: Grafico della risposta di LISA ad un'onda che proviene dalla direzione  $\theta = \pi/4$ ,  $\phi = \pi/3$ . In verde è indicata la risposta alla polarizzazione  $+$  in funzione della frequenza, in rosso la risposta alla polarizzazione  $\times$ .

Le figure 3.6 e 3.7 mostrano le funzioni di risposta della configurazione 1-3 nel caso di un'onda proveniente dalla direzione  $\theta = \pi/4$ ,  $\phi = \pi/3$  (figura 3.6) e dalla direzione  $\theta = \pi/4$ ,  $\phi = \pi/2$  (figura 3.7). È importante notare che, a

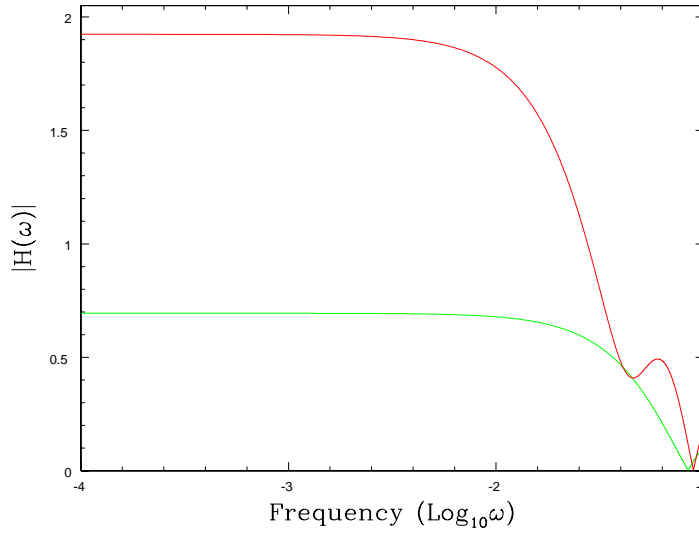


Figura 3.7: Grafico della risposta di LISA ad un'onda che proviene dalla direzione  $\theta = \pi/4$ ,  $\phi = \pi/2$ . In verde è indicata la risposta alla polarizzazione  $+$  in funzione della frequenza, in rosso la risposta alla polarizzazione  $\times$ .

seconda del valore dell'angolo  $\phi$ , questa configurazione è più sensibile all'una o all'altra polarizzazione.

Questo discorso è in realtà valido anche per le altre due configurazioni a due bracci. Un semplice ragionamento geometrico permette infatti di ricavare le funzioni di risposta delle configurazioni  $C_{1-2}(\theta, \phi)$  e  $C_{2-3}(\theta, \phi)$  in funzione della risposta per la configurazione  $C_{1-3}(\theta, \phi)$ . Infatti è immediato verificare che l'interferometro formato dai bracci  $l_1$  e  $l_2$  può essere rivisto come l'interferometro formato dai bracci  $l_1$  e  $l_3$ , però ruotato di  $60^\circ$  in senso antiorario nel piano  $uv$ . Analogamente l'interferometro formato dai bracci  $l_2$  e  $l_3$  può essere sempre rivisto come l'interferometro formato dai bracci  $l_1$  e  $l_3$ , ruotato sempre di  $60^\circ$  nel piano  $uv$ , però in senso orario.

## Capitolo 4

# Emissione di onde gravitazionali da sistemi binari

### 4.1 L'emissione di onde gravitazionali da sistemi binari

La relatività generale prevede che un corpo rigido in rotazione con frequenza angolare  $\Omega$  emetta onde gravitazionali di frequenza  $2\Omega$  con una potenza LGW data da:

$$L_{\text{GW}}(2\Omega) = \frac{32G\Omega^6 I^2 e^2}{5c^5} \quad (4.1)$$

in cui  $I$  è il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione, mentre  $e$  è chiamata ellitticità equatoriale ed è funzione di  $I$  e dei momenti di inerzia del corpo rispetto a due assi  $x$  e  $y$  perpendicolari tra loro ed a quello di rotazione:

$$e \equiv \frac{I_x - I_y}{I_z} \quad (4.2)$$

in cui  $I_x$  e  $I_y$  sono i suddetti momenti di inerzia. Un sistema binario circolare può essere considerato, in prima approssimazione, come un corpo rigido che ruota attorno ad un asse passante per il centro di massa del sistema e perpendicolare all'asse congiungente le due stelle. Il suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione è quindi dato da:

$$I = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} r^2 = \mu r^2 \quad (4.3)$$

in cui  $M_1$  ed  $M_2$  sono le masse delle due stelle,  $r_1$  ed  $r_2$  sono le rispettive distanze dal centro di massa,  $\mu = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$  è la massa ridotta del



sistema e  $r_0 = r_1 + r_2$  è la separazione orbitale. Nella catena di uguaglianze è stata inoltre utilizzata la relazione  $M_1 r_1 = M_2 r_2$  che è una diretta conseguenza della definizione di centro di massa. Gli assi  $x$  e  $y$  possono essere scelti nel modo seguente: l'asse  $x$  coincidente con l'asse passante per le due stelle, l'asse  $y$ , conseguentemente, perpendicolare all'asse  $x$  ed a quello di rotazione. È facile verificare che, con questa scelta, si ottiene  $I_x = 0$  e  $I_y = I$ . La potenza emessa in onde gravitazionali da questo sistema risulta essere:

$$L_{\text{GW}}(2\Omega) = \frac{32G^4\Omega^6 I^2 e^2}{5c^5} = \frac{32GM^3\mu^2}{5c^5 r_0^5} \quad (4.4)$$

in cui  $M = M_1 + M_2$  indica la massa totale del sistema. Nel secondo passaggio è stata applicata la *III* legge di Keplero:

$$r_0^3 = \frac{GM}{4\pi^2} T^2 = \frac{GM}{\Omega^2} \quad (4.5)$$

in cui  $T$  è il periodo orbitale del sistema. Nel caso di un sistema binario ellittico la trattazione del problema è più complessa, dato che si deve tenere conto che in un sistema non circolare la distanza tra le due stelle varia nel tempo e, conseguentemente, i momenti di inerzia del sistema. Non ostante ciò, l'espressione per la potenza emessa in onde gravitazionali da un sistema ellittico differisce dal risultato precedente per un fattore correttivo  $f(e)$  dipendente solo dall'eccentricità del sistema:

$$L_{\text{GW}}(2\Omega) = \frac{32G^4 M^3 \mu^2}{5c^5 r_0^5} f(e)$$

$$f(e) = \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{(1 - e^2)^{-7/2}} \quad (4.6)$$

## 4.2 Evoluzione dei parametri orbitali

L'emissione di onde gravitazionali da parte di un sistema binario comporta una perdita di energia da parte del sistema stesso. L'energia  $E$  di un sistema binario è data dalla somma dell'energia cinetica totale  $K$  e dell'energia potenziale  $V = -GM\mu/r_0$ . Un sistema binario, d'altra parte, può essere considerato come un sistema in equilibrio sotto l'azione della sola forza gravitazionale. Per

sistemi in questa condizione vige il teorema del viriale, che fornisce una relazione tra l'energia totale e la sola energia potenziale:

$$E = \frac{1}{2}V = -\frac{1}{2}K = -\frac{1}{2} \frac{GM\mu}{r_0} \quad (4.7)$$

Quest'ultima relazione stabilisce un legame tra l'energia totale e la separazione orbitale del sistema. Conseguentemente, una variazione di una grandezza tra queste due comporta la variazione dell'altra:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2} \frac{GM\mu}{r_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{GM\mu}{r_0^2} \frac{dr_0}{dt} \quad (4.8)$$

È immediato vedere che una perdita di energia del sistema comporta una diminuzione della separazione orbitale. A questo fenomeno è stato dato il nome di **decadimento dell'orbita**. Uguagliando ora l'espressione della potenza emessa per onde gravitazionali con l'espressione che lega la variazione dell'energia di un sistema alla variazione della separazione orbitale si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{GM\mu}{r_0^2} \frac{dr_0}{dt} = -\frac{32G^4 M^3 \mu^2}{5c^5 r_0^5} f(e) = -L_{\text{GW}} \quad (4.9)$$

in cui il segno meno sta ad indicare che il sistema sta perdendo energia a causa dell'emissione di onde gravitazionali. L'equazione che descrive l'evoluzione nel tempo della separazione orbitale è quindi:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{64 G^3 M^2 \mu}{5 c^5 r^3} f(e) \quad (4.10)$$

Quest'equazione è facilmente risolvibile e permette di ricavare la dipendenza dal tempo della separazione orbitale:

$$r(t) = r_0 \left( 1 - \frac{t}{\tau_0} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.11)$$

ottenuta imponendo la condizione iniziale  $r(t=0) = r_0$ . La costante  $\tau_0$  è così definita:

$$\tau_0 = \frac{5c^5 r_0^4}{256G^3 M^2 \mu f(e)} \quad (4.12)$$

ed è un tempo importantissimo per il sistema binario. Si vede facilmente che vale  $r(\tau_0) = 0$ , quindi  $\tau_0$  è il tempo che impiegheranno le due stelle del

sistema binario a fondersi a causa del decadimento dell'orbita. Questo tempo è chiamato **tempo di coalescenza**.

Infine, poiché in un sistema binario i valori istantanei della separazione orbitale e del periodo orbitale sono legati tra loro tramite la III legge di Keplero, è possibile riscrivere l'equazione 4.11 in modo tale da ottenere la funzione che descrive la dipendenza dal tempo del periodo orbitale del sistema. Con semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$T(t) = T_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_0}\right)^{\frac{3}{8}} \quad (4.13)$$

in cui  $T_0$  è il valore attuale del periodo orbitale.

### 4.3 Un Buco Nero binario nel Quasar 3C345

Nel lavoro di Lobanov e Roland è stato trattato il Quasar 3C 345, con  $z = 0.595$ , associando l'interazione tra buco nero e disco di accrescimento con il modello a doppio fluido per spiegare le proprietà cinematiche, la struttura interna del jet e i suoi outburst alla scala parsec. Attraverso il modello del buco nero che interagisce col disco di accrescimento del compagno, nel lavoro viene derivato un formalismo per calcolare l'emissione e la cinematica del sistema. Sono anche riusciti ad ottenere il valore delle masse dei buchi neri e il loro periodo orbitale. Per uno schema del sistema si veda la figura 1, in cui i due buchi neri, facenti parte del sistema binario, situati nei punti  $M_1$  e  $M_2$ , orbitano nel piano  $\chi O\zeta$ , e il cui centro di massa è in  $O$ . Il cerchio grigio attorno al buco nero primario  $M_1$  ne rappresenta il disco di accrescimento, inclinato di un angolo  $\Omega_p$  rispetto al piano  $\chi O\zeta$ .  $\Omega_p$  rappresenta la semi apertura angolare del cono di precessione, il cui asse è indicato con  $\tilde{\xi}$  ed è parallelo a  $\xi$ . L'angolo tra e la linea di vista è indicato con  $\iota$  e  $M_1 J$  indica la direzione istantanea dell' asse del beam.

Si ottengono per le masse i seguenti valori:  $M_1 = M_2 = 7.1 \times 10^8 M_\odot$ . In definitiva, si può dire che il modello di BBH applicato al Quasar 3C345 fornisce una descrizione abbastanza buona della variabilità del flusso ottico e dell'evoluzione della configurazione della componente C7, apparsa per la prima volta durante l'esplosione del 1991. Il modello ricostruisce molto bene le condizioni fisiche del plasma emesso dal jet e la proprietà dinamiche del sistema di BBH. Questo modello era stato applicato precedentemente anche da Caproni

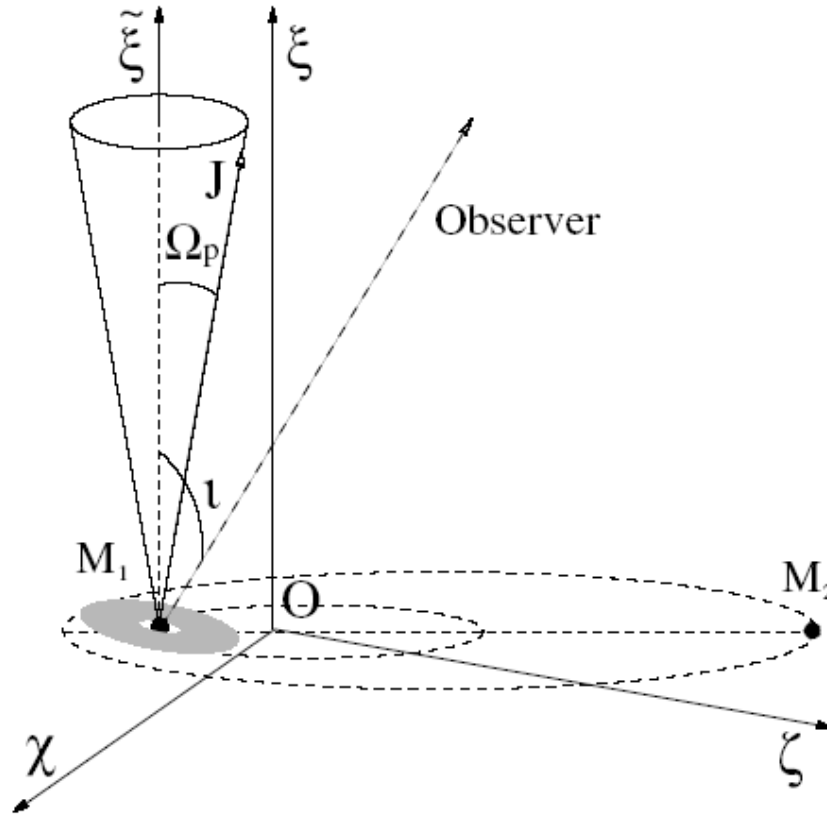


Figura 4.1:  $M_1$  e  $M_2$  indicano le posizioni dei due buchi neri che orbitano nel piano  $\chi O \zeta$ .  $O$  indica il centro di massa del sistema e l'origine degli assi. Il disco di accrescimento (la zona colorata in grigio) è inclinata rispetto al piano orbitale di un angolo  $\Omega_p$ ; l'asse  $\xi$  è l'asse di precessione che è parallelo a  $\xi$ . La direzione temporanea del beam è data dal vettore  $M_1 J$ .

e Abraham a 3C345, però attribuendo la variazione dell'angolo di emissione alla precessione del disco di accrescimento. Così facendo si otteneva un valore del periodo di precessione troppo piccolo  $2.5 \leq T_p \leq 3.8$  anni, e quindi masse per i buchi neri troppo elevate ( $M_1 = (4 - 5) \times 10^9 M_\odot$  e  $M_2 = (3 - 4) \times 10^8 M_\odot$ ) e una separazione orbitale molto piccola ( $r_0 = 0.017 - 0.024$  pc). In un siffatto sistema, il raggio del disco di accrescimento del buco nero secondario,  $r_a = 0.034 - 0.050$  pc, risulta più grande della separazione orbitale, e quindi il disco non sarebbe stabile. Ogni volta che il buco nero secondario attraversa il disco accrescimento perderebbe una grande quantità di massa che per Caproni e Abraham potrebbe raggiungere  $\dot{m} \approx \dot{M}_1 (\sqrt{10} \alpha_*^{4/5})^{-1}$  dove  $\dot{M}_1$  è la quantità di cui aumenta la massa del buco nero primario e  $\alpha_* = \alpha / 10^{-2}$  è la viscosità

del disco. Quindi per piccoli valori di accrescimento o per piccoli valori di viscosità,  $\dot{M}_2$  sarebbe potuta diventare più grande di  $\dot{M}_1$ , e questo porterebbe probabilmente alla distruzione del disco di accrescimento. Usando le condizioni di stabilità del disco di accrescimento per determinare le masse dei buchi neri, che valgono  $M_1 = M_2 = 7.1 \times 10^8 M_\odot$ , il modello riesce a spiegare molte proprietà osservate in 3C345, e perciò lo sceglie anche per valutare quale siano le masse del sistema in esso contenuto.

Il sistema ha i seguenti parametri:

$$M_1 = M_2 = 7.1 \times 10^8 M_\odot$$

$M = M_1 + M_2 = 14.2 \times 10^8 M_\odot$ , dove  $M$  indica la massa totale del sistema.

$\mu = M_1 M_2 / (M_1 + M_2) = 3.55 \times 10^8 M_\odot$ , dove  $\mu$  rappresenta la massa ridotta.

$r_0 = 0.33$  pc, separazione orbitale del sistema

Utilizzando l'equazione 4.6 e sapendo che  $L_0 = 3 \times 10^{59} \text{ erg s}^{-1}$  si ottiene:

$$L_{\text{GW}} \sim 2.3 \times 10^{40} \text{ erg sec}^{-1} \quad (4.14)$$

In questo caso specifico, per cui  $e \leq 0.1$ , e approssimando lo si considera  $e = 0.1$ ,  $f(e)$  risulta essere uguale a 1.03, perciò, utilizzando la formula (5):

$$L_{\text{GW}} \sim 5.4 \times 10^{40} \text{ erg sec}^{-1} \quad (4.15)$$

Utilizzando la formula (11), sostituendo i valori di  $M$ ,  $r_0$  e  $\mu$  che conosciamo, possiamo trovare il valore di  $\tau_0$ , che sarà:  $\tau_0 = 8.83 \times 10^{25} \text{ m} = 2.94 \times 10^{17} \text{ s} = 9.34 \times 10^9$  anni.

Per valutare il periodo orbitale, che in questo caso specifico vale 480 anni, si utilizza l'espressione (14). Vediamo ora il grafico di quella che è l'evoluzione orbitale col tempo. Partendo dalle formula (14) e sostituendo i valori calcolati sopra si ottiene un grafico riportato in figura 4.2

Il grafico riporta la variazione del periodo orbitale nel tempo. È evidente come questa variazione è lenta inizialmente (profilo poco curvo) e come invece aumenti (profilo molto curvo) man mano che la distanza tra i due buchi neri diminuisca e si avvicinino alla coalescenza.

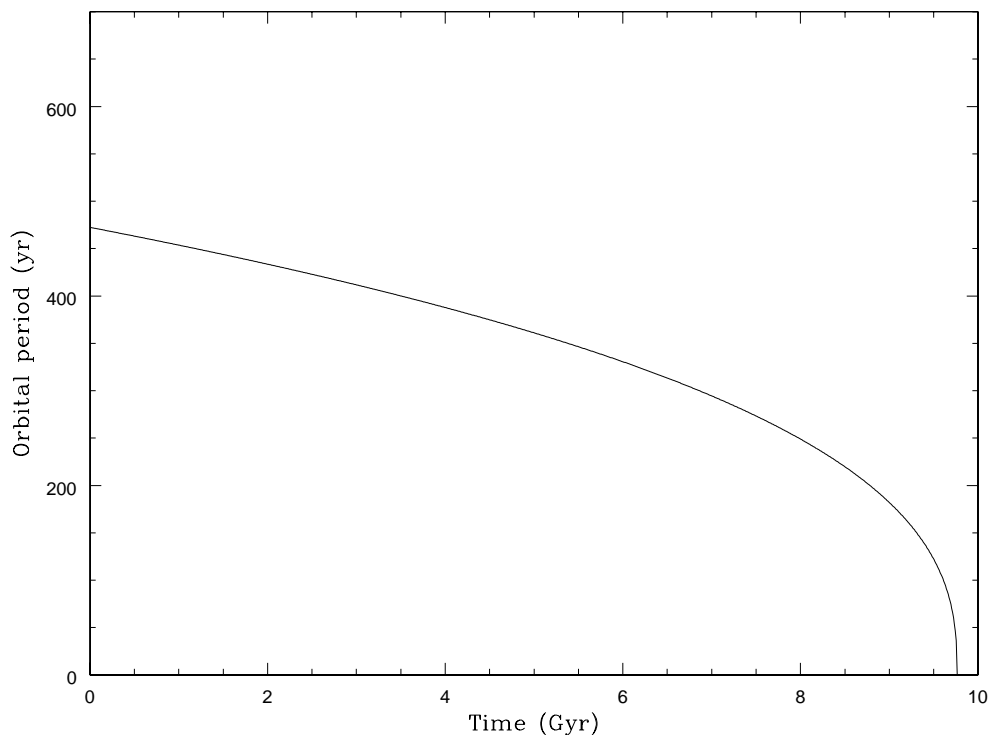


Figura 4.2: Variazione de periodo orbitale nel tempo per il sistema di buchi neri binario nel Quasar 3C345.

#### 4.4 Mkn 501

La struttura dell'oggetto centrale supermassivo della galassia Mkn 501 è tutt'ora oggetto di dibattito, poiché non è ancora stato possibile stabilire se tale oggetto sia un buco nero isolato o un sistema binario di due buchi neri.

Lo studio della galassia ospite ed in particolare delle correlazioni  $M - L_{\text{Bulge}}$  e  $M - \sigma_v$  indicherebbero in un buco nero singolo la natura dell'oggetto centrale, la cui massa dovrebbe essere maggiore di  $5 \times 10^8 M_{\odot}$ . Lo studio e la modellizzazione dell'emissione ad alta energia di questo oggetto confermano, da un lato, lo scenario del buco nero singolo ma portano ad una stima della sua massa totalmente differente:  $M \leq 6 \times 10^7 M_{\odot}$ . La forte dipendenza del valore numerico dal modello adottato non consente di considerare tale valore come un limite superiore certo che, del resto, sarebbe in totale disaccordo con la stima ottenuta utilizzando le correlazioni  $M - L_{\text{Bulge}}$  e  $M - \sigma_v$ . Fortunatamente alcuni modelli di emissione portano a valori maggiori anche di un ordine di grandezza.

La variabilità dell'emissione di Mkn 501 può essere spiegata anche partendo dallo scenario base di un sistema binario di due buchi neri. In questo caso le caratteristiche dei jet di emissione suggeriscono che tali jet sono prodotti dal buco nero secondario. Utilizzando parametri tipici per l'emissione a jet, ed assumendo che l'accrescimento sul secondario avvenga al limite di Eddington e che la separazione orbitale per questo sistema sia confrontabile con quella gravitazionale, è stata ricavata una relazione tra la massa totale e la massa del buco nero secondario di questo sistema. In particolare, ad una massa del secondario  $m = 6 \times 10^7 M_\odot$  si ottiene una massa totale pari a  $(1.5-2) \times 10^8 M_\odot$ . Lo studio della variabilità dell'emissione nei jet ha inoltre permesso di ricavare il periodo orbitale,  $P_B = 23$  giorni. L'eccentricità di questo sistema binario è assunta nulla o trascurabile: il basso valore per il periodo orbitale indicherebbe che questi oggetti sono prossimi alla coalescenza e, in questa situazione le intense forze mareali dovute al campo gravitazionale hanno potuto circularizzare l'orbita.

Utilizzando per Mkn 501 i seguenti valori:

$$M_1 = 3 \times 10^8 M_\odot$$

$$M_2 = 6 \times 10^7 M_\odot$$

$$M = (1.2 - 3.6) \times 10^8 M_\odot$$

$$P_B = 23 \text{ giorni}$$

$$z = 0.031$$

sono stati calcolati la potenza emessa in onde gravitazionali (equazione 4.6) ed il tempo di coalescenza (equazione 4.12) per questo sistema. I valori ottenuti sono:

$$\begin{aligned} L_{GW} &= -3.4 \times 10^36 \text{ watt} \\ \tau_0 &= 9.8 \times 10^6 \text{ yrs} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Analogamente a quanto fatto per 3C345 è stata utilizzata l'equazione 4.13 per evidenziare la futura evoluzione binaria di questo sistema. La figura 4.3 mostra l'andamento del periodo orbitale in funzione del tempo per questo sistema. Qualitativamente l'andamento è analogo a quanto visto per 3C345:

la variazione del periodo orbitale è praticamente lineare fino a circa metà del tempo rimasto prima della coalescenza e, successivamente, tale variazione diventa sempre più rapida.

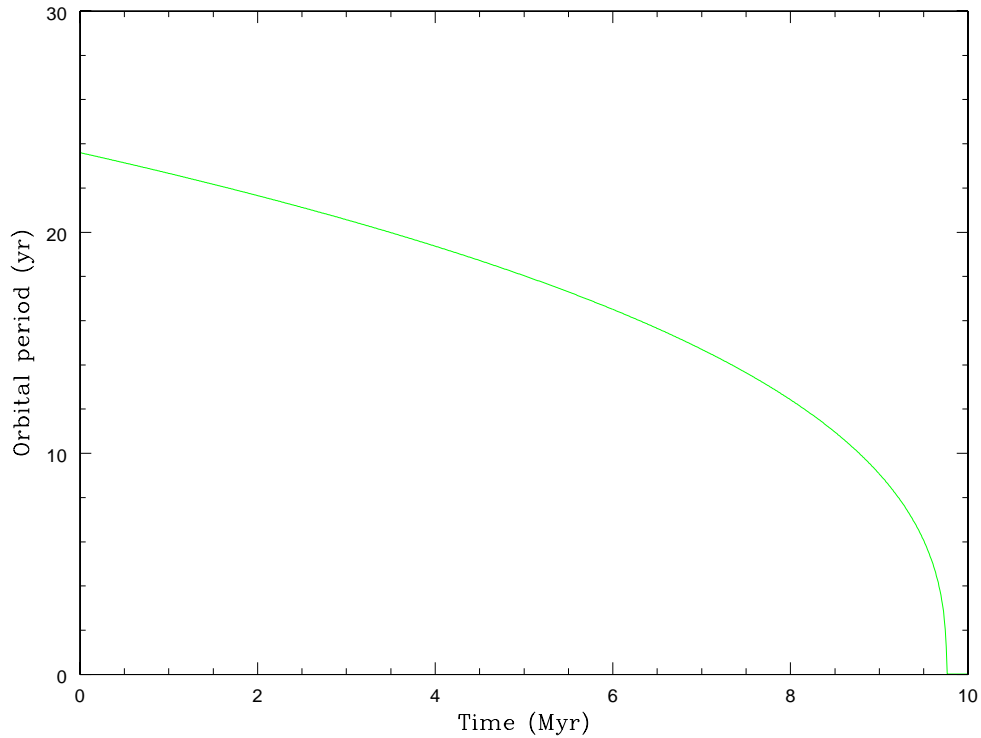


Figura 4.3: Variazione de periodo orbitale nel tempo per il sistema di buchi neri binario nella galassia Mkn 501.

## 4.5 OJ 287

OJ 287, un oggetto appartenente alla classe BL Lacerate, è un'altra sorgente per cui è stata ipotizzata la presenza di un buco nero binario.

La massa del buco nero primario è stata stimata utilizzando due metodi differenti: il primo sfrutta la correlazione  $M - L_{\text{Bulge}}$  tra la massa del buco nero e la luminosità del Bulge (McLure & Dunlop 2002), il secondo sfrutta invece la correlazione  $M - \sigma_v$  tra la dispersione di velocità delle stelle del bulge ed, ancora, la massa del buco nero centrale (Merrit & Ferrarese 2001b). Il primo metodo consente di ottenere il valore  $M = 4.6 \times 10^8 M_{\odot}$ , mentre il secondo



$M = 3.2 \times 10^8 M_\odot$ . L'utilizzo del valore  $M = 4 \times 10^8 M_\odot$  consente di ricavare stime attendibili.

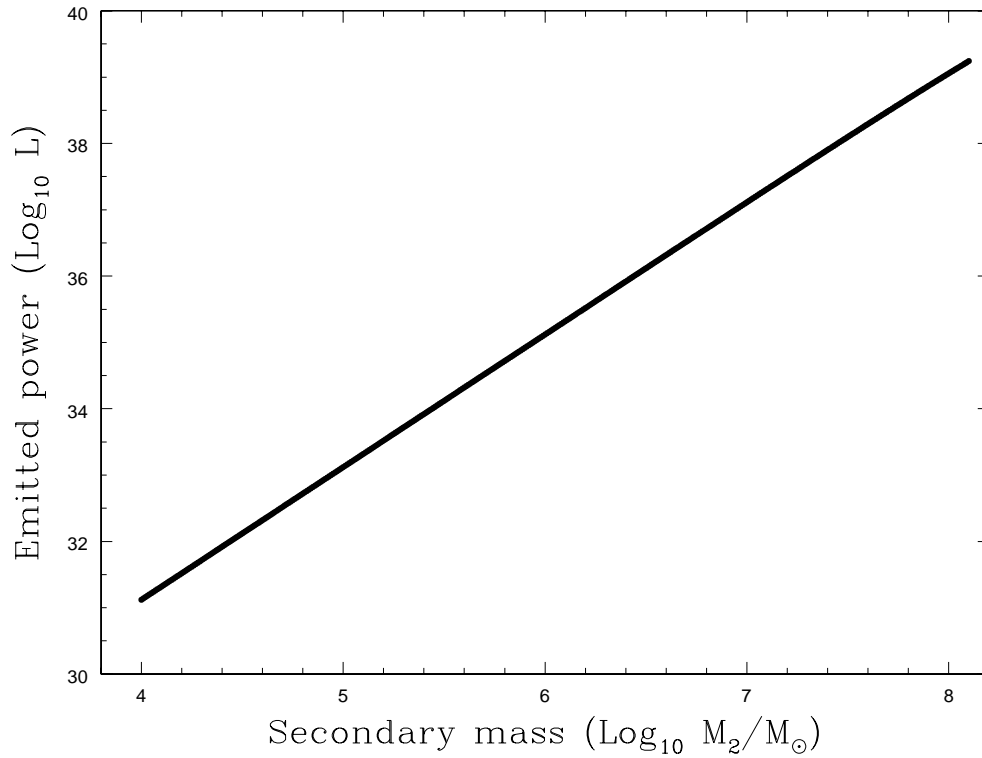


Figura 4.4: Dipendenza della potenza emessa  $L_{\text{GW}}$  dalla massa del buco nero secondario  $M_2$  per il sistema binario OJ 287

Al contrario di quanto ricavato per il primario, non è stato possibile finora ottenere una stima della massa del secondario. Tuttavia è stato ottenuto un ragionevole limite superiore,  $M \leq 10^8 M_\odot$ , analizzando la variabilità X della sorgente ed attribuendo tale variabilità al peculiare comportamento del gas in accrescimento. L'analisi della variabilità X ha inoltre permesso la misura del periodo orbitale,  $P_B = 11.9$  anni e la determinazione dell'eccentricità orbitale,  $e = 0.78$ .

I parametri disponibili per questo sistema sono in sintesi i seguenti:

$$M_1 = 4 \times 10^8 M_\odot$$

$$M_2 \leq 10^8 M_\odot$$

$$P_B = 11.9 \text{ anni}$$

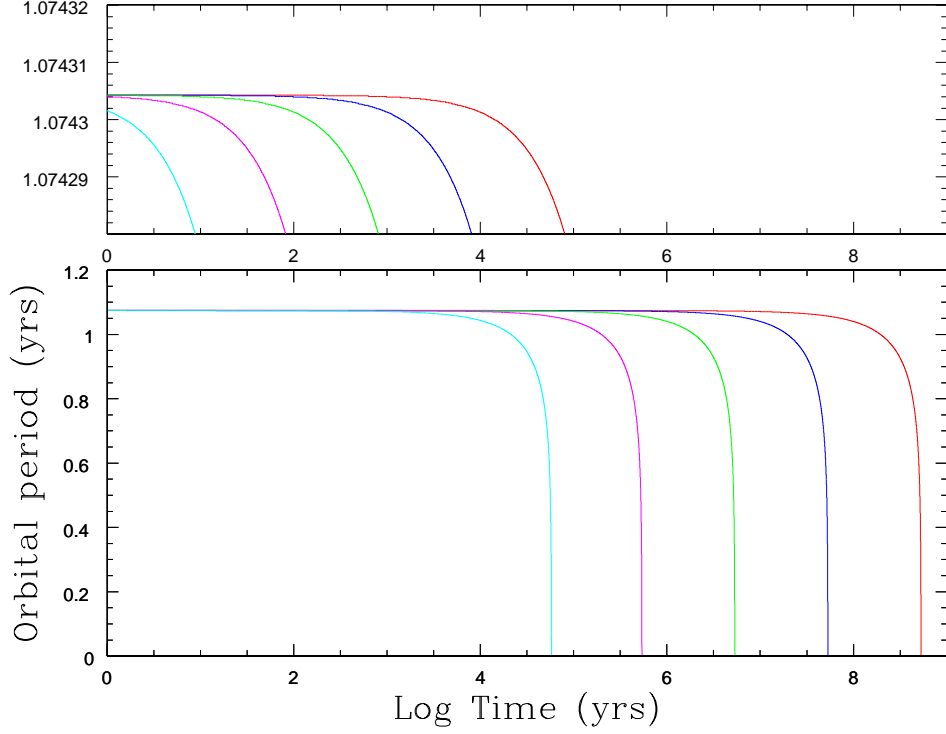


Figura 4.5: Evoluzione nel tempo del periodo orbitale del sistema binario OJ 287. Sono mostrati gli andamenti per masse pari a  $M_2 = 10^4 M_\odot$  (azzurro),  $M_2 = 10^5 M_\odot$  (viola),  $M_2 = 10^6 M_\odot$  (verde),  $M_2 = 10^7 M_\odot$  (rosso)  $M_2 = 10^8 M_\odot$  (blu).

$$e = 0.78$$

$$z = 0.306$$

Non essendo disponibile una stima della massa del secondario, la potenza emessa per onde gravitazionali ed il tempo di coalescenza sono stati calcolati utilizzando le equazioni (4) e (5), in corrispondenza di un intervallo per la massa del secondario  $10^4 M_\odot \leq M_2 \leq 10^8 M_\odot$ . Data la complessità di tale conto è stato scritto un codice dedicato, utilizzando il linguaggio di programmazione Fortran77. L'intervallo di massa è stato indagato con una risoluzione logaritmica pari a 0.001 ( $\Delta \log_{10} M_2 = 0.001$ ).

La figura 4.4 mostra l'andamento della potenza emessa, mentre la figura 4.5 illustra l'andamento del periodo orbitale in corrispondenza di alcuni valori di riferimento per  $M_2$ .

## 4.6 La doppia pulsar

Il sistema binario formato dalle due pulsar PSR J0737–3039A/B (Burgay et al. 2004, Lyne et al. 2004) è un efficiente emettitore di onde gravitazionali, per via della separazione orbitale estremamente ridotta e non ostante la massa totale di questo sistema sia inferiore di ben otto ordini di grandezza rispetto agli esempi precedentemente illustrati. Inoltre, la distanza di questo sistema, dell'ordine del kpc, impone di considerare anche questo sistema tra le sorgenti di onde gravitazionali rilevabili dagli strumenti attualmente in funzione o in fase di realizzazione.

Utilizzando i parametri orbitali per questo sistema pubblicati da Burgay et al. (2004) sono stati calcolati la potenza emessa per onde gravitazionali ed il tempo di coalescenza di questo sistema:

$$\begin{aligned} L_{\text{GW}} &= -2.1 \times 10^{25} \text{watt} \\ \tau_0 &= 9.0 \times 10^8 \text{anni} \end{aligned} \tag{4.17}$$

## 4.7 Il redshift cosmologico

Una evidenza osservativa dell'espansione dell'universo è lo spostamento verso il rosso, o redshift, delle righe spettrali delle galassie lontane. Tale spostamento delle righe spettrali è una conseguenza diretta di un allontanamento della sorgente rispetto all'osservatore. Nel 1929 Hubble osservò tale spostamento delle righe spettrali per un vasto campione di galassie e per ognuna di esse ricavò la velocità di allontanamento basandosi sull'effetto Döppler. Hubble notò che la velocità di allontanamento  $V$  era correlata con la distanza  $d$  delle galassie stesse secondo la relazione che da lui prende il nome:

$$V = H_0 d \tag{4.18}$$

$H_0$  prende il nome di costante di Hubble. Il suo valore è a tutt'oggi incerto entro un fattore 2 tra i valori di 50 e 100 km/s/Mpc. Le incertezze nella determinazione del valore di  $H_0$  sono essenzialmente dovute alle incertezze con cui sono note le distanze delle galassie lontane. Recenti studi sulle anisotropie della radiazione cosmica di fondo indicherebbero un valore  $H_0 = 72 \text{km/s/Mpc}$ . Tale risultato è tuttavia ancora oggetto di dibattito. In ogni caso, la validità

della legge di Hubble, indipendentemente dal valore di  $H_0$ , è una conferma dell'espansione omogenea di un universo omogeneo a tutti i tempi. Per questo motivo lo spostamento verso il rosso degli spettri delle galassie lontane va sotto il nome di *redshift cosmologico*.

La teoria della relatività generale permette un'analisi quantitativa estremamente accurata. Uno spazio tempo omogeneo ed isotropo è descritto dalla metrica di RobertsonWalker:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (4.19)$$

in cui  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  sono le tre coordinate polari e, in particolare,  $r$  è chiamata distanza *comovente*,  $k$  è chiamato parametro di curvatura ed assume i valori -1, 0 ed 1 per un universo rispettivamente aperto, piatto e chiuso e  $a(t)$  è chiamato parametro di espansione. Il concetto di distanza comovente è molto utile nella descrizione di un universo omogeneo ed isotropo. È facile mostrare che, sotto tali ipotesi, la distanza  $R(t)$  tra due qualsiasi punti dell'universo può essere fattorizzata nel modo seguente:

$$R(t) = a(t)r \quad (4.20)$$

in cui  $a(t)$  è una funzione crescente del tempo e  $r$ , la distanza comovente, è una quantità dipendente dalle posizioni dei due punti presi in esame, ma **costante nel tempo** se il moto relativo tra i due punti è dovuto alla sola espansione cosmologica.

Consideriamo un'onda luminosa di lunghezza d'onda  $\lambda$  in moto geodetico in un sistema di riferimento comovente centrato sull'osservatore, quindi caratterizzato da  $\theta, \phi = \text{cost}$ . Dalla metrica di RobertsonWalker si ottiene:

$$0 = ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} \right] \quad (4.21)$$

da cui si ricava:

$$cdt = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (4.22)$$

Separando le variabili ed integrando ambo i membri si ottiene:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (4.23)$$

in cui  $t_e$  è il tempo a cui viene emessa dalla sorgente una cresta d'onda,  $t_0$  è il tempo a cui tale cresta d'onda giunge all'osservatore,  $r_e$  la distanza comovente della sorgente. Consideriamo ora la cresta d'onda successiva, emessa al tempo  $t_e + \Delta t_e$  ed osservata al tempo  $t_0 + \Delta t_0$ . Per la prima cresta d'onda vale la relazione 4.23, mentre per la seconda cresta d'onda vale:

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (4.24)$$

I secondi membri delle equazioni 4.23 e 4.24 sono uguali dato che dipendono solo dalla distanza comovente. È quindi possibile uguagliare i primi membri di queste equazioni ed ottenere:

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{cdt}{a(t)} = 0 \quad (4.25)$$

I due integrali possono essere facilmente risolti osservando che la funzione  $a(t)$  può essere considerata costante durante entrambi gli intervalli di integrazione, uguali ad un periodo, rispettivamente osservato e di emissione, della radiazione osservata. Si ottiene:

$$\frac{c\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{c\Delta t_e}{a(t_e)} \quad (4.26)$$

o, equivalentemente:

$$\frac{c\Delta t_0}{c\Delta t_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (4.27)$$

L'equazione 4.27 mostra chiaramente che la radiazione emessa ad una lunghezza d'onda  $\lambda_e$  viene osservata alla lunghezza d'onda  $\lambda_0$  a causa dei diversi valori del parametro di espansione al tempo in cui la radiazione viene emessa ed osservata. Il redshift  $z$  è definito sulla base della relazione 4.27:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_e} \quad (4.28)$$

In un universo in espansione il parametro di espansione è maggiore al tempo in cui la radiazione viene osservata rispetto all'epoca della sua emissione.

Conseguentemente la radiazione sarà osservata con una lunghezza d'onda maggiore di quella a cui la medesima onda è stata emessa.

## 4.8 Il contributo dei sistemi binari di buchi neri supermassivi al background di onde gravitazionali

La presenza di un elevato numero di sistemi binari di buchi neri supermassivi (SMBH) contribuisce al background di onde gravitazionali (GWBG) presente nell'universo. Lo spettro di questo contributo al GWBG può essere calcolato a partire dall'ampiezza delle onde gravitazionali generate da un singolo sistema binario, assunto per semplicità circolare. Tale assunzione, in generale non valida, può essere giustificata tenendo conto che i sistemi che emettono onde gravitazionali con maggiore efficienza sono quelli prossimi alla coalescenza. L'ampiezza delle onde gravitazionali emesse da un sistema binario è data da:

$$\begin{aligned} h_s(z, f, M_1, M_2) &= 4\sqrt{\frac{2}{5}} \frac{(GM_{\text{chirp}})^{5/3}}{c^4 D(z)} (2f_p)^{2/3} \\ &= 3.5 \times 10^{17} \left( \frac{M_{\text{chirp}}}{10^8 M_\odot} \right) \left[ \frac{D(z)}{1 \text{ Gpc}} \right]^{-1} \left[ \frac{f(1+z)}{10^{-7} \text{ Hz}} \right]^{2/3} \end{aligned} \quad (4.29)$$

in cui  $M_{\text{chirp}}$  indica la massa chirp del sistema,  $c$  la velocità della luce,  $f$  la frequenza dell'onda emessa, e  $f_p$  il reciproco del periodo proprio nel sistema del centro di massa.  $f$  ed  $f_p$  sono legate dalla relazione  $f = 2f_p/(1+z)$ , in cui il fattore 2 tiene conto del legame tra la frequenza del sistema binario e quella dell'onda emessa, mentre il termine  $(1+z)$  tiene conto del redshift cosmologico. Nell'equazione 4.29  $D(z)$  si indica la distanza reale della sorgente dall'osservatore, che è funzione del solo redshift della sorgente e del modello cosmologico adottato:

$$D(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_\Lambda} \quad (4.30)$$

dove  $\Omega_m$  indica il parametro di densità,  $\Omega_\Lambda$  indica la costante cosmologica, e  $H_0$  è la costante di Hubble. In questo lavoro sono utilizzati i valori  $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$  e  $H_0 = 70 \text{ km/sec/Mpc}$ . Lo spettro di background è dato dalla sovrapposizione delle onde emesse da tutti i sistemi binari. È quindi necessario calcolare  $\nu(M_1, M_2, z)dM_1dM_2dz$ , cioè il numero sistemi binari in coalescenza,

per unità di tempo proprio dell'osservatore, collocate ad un redshift tra  $z$  e  $z + dz$ , con masse tra  $M_1 + dM_1$  e  $M_2 + dM_2$ :

$$\nu(M_1, M_2, z) = \frac{dV}{dt_0} n_c(M_1, M_2, z) = \frac{1}{1+z} \frac{dV}{dt_p} n_c(M_1, M_2, z) \quad (4.31)$$

in cui  $t_0$  indica il tempo di osservazione,  $t_p$  indica il tempo proprio nel sistema di riferimento al redshift  $z$  e  $dV$  è l'elementino di volume comovente collocato tra  $z$  e  $z + dz$ :

$$\frac{dV}{dt_p} = 4\pi(1+z)cD^2(z) \quad (4.32)$$

Il tempo caratteristico di emissione di onde gravitazionali misurato nel sistema di riferimento del sistema binario è:

$$\tau_{\text{GW}} \equiv f_p \frac{dt_p}{df_p} \quad (4.33)$$

mentre il medesimo tempo caratteristico, nel sistema di riferimento dell'osservatore, è  $\tau_{\text{GW,obs}} = \tau_{\text{GW}}(1+z)$ . Per un sistema binario in orbita circolare ad un redshift  $z$ ,  $\tau_{\text{GW,obs}}$  è dato da:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{GW,obs}}(M_1, M_2, z, f) &= \frac{5}{96} \left( \frac{c^3}{GM_{\text{chirp}}} \right)^{\frac{5}{3}} [2\pi f_p]^{-8/3} (1+z) \\ &= 1.2 \times 10^4 \left( \frac{M_{\text{chirp}}}{10^8 M_\odot} \right)^{-\frac{5}{3}} \left[ \frac{f(1+z)}{10^{-7} \text{ Hz}} \right]^{-\frac{8}{3}} (1+z)^{-5/3} \end{aligned} \quad (4.34)$$

In accordo con la relatività generale, l'evoluzione degli SMBHs comporta un decadimento dell'orbita nel tempo. Di conseguenza, la frequenza orbitale aumenta perché la separazione orbitale e, in virtù della III legge di Keplero, il periodo orbitale diminuiscono.

Si assume che, per separazioni orbitali maggiori di  $3R_S$  (dove con  $R_S$  si indica il raggio di Schwarzschild, cioè il raggio dell'ultima orbita circolare stabile per una particella orbitante intorno ad un buco nero non ruotante) le orbite siano quasi stazionarie, cioè i tempi caratteristici con cui variano i parametri orbitali sono molto maggiori di  $\tau_{\text{GW}}$ .

La massima frequenza di emissione si ha quindi in corrispondenza dell'orbita stabile il cui periodo è minimo. Tale orbita è chiamata *ultima orbita stabile* e, per un buco nero non ruotante, il suo raggio è pari a 3 volte il raggio  $R_S$  dell'orizzonte degli eventi: Ancora la relatività generale consente di calcolare il raggio dell'ultima orbita stabile,  $R_S$  nel caso di un BH non ruotante. Tale valore è però relativo al caso in cui la massa dell'oggetto in orbita attorno al buco nero sia trascurabile rispetto a quella del buco nero centrale. Qualora tale assunzione non sia valide, cioè le masse dei due buchi neri sono confrontabili, la definizione dell'ultima orbita stabile non è più data dalla relazione  $R_{\text{LSO}} = 3R_S$ , pertanto la frequenza corrispondente a tale orbita non può più essere considerata, a priori, la massima frequenza di emissione.

Nel caso di sistemi binari circolari in cui la massa del buco nero secondario sia trascurabile rispetto a quella del primario, la frequenza massima dell'onda gravitazionale è data dalla seguente espressione:

$$f_{\text{max}}(M_1, M_2, z) = \frac{c^3}{6^{3/2}\pi GM_1(1+z)} \left(1 + \frac{M_2}{M_1}\right) \quad (4.35)$$

nella quale  $M_1$  ed  $M_2$  indicano le masse dei singoli buchi neri del sistema, avendo posto  $M_1 \geq M_2$ . Una stima del numero di SMBH binari coalescenti, sorgenti di onde gravitazionali, con frequenza  $f$  e redshift  $z$ , è data da:

$$d\mathcal{N}(M_1, M_2, z) = \nu(M_1, M_2, z) dz dM_1 dM_2 \tau_{\text{GW,obs}} \theta(f_{\text{max}} - f) \quad (4.36)$$

dove  $\theta(x)$  è la funzione a scalino. Combinando le equazioni 4.29 4.31 4.34, si ottiene la seguente espressione per lo spettro della radiazione delle onde gravitazionali di background:

$$\begin{aligned} h_c^2(f) &= \int \frac{d\mathcal{N}(M_1, M_2, z)}{dz dM_1 dM_2} dz dM_1 dM_2 \\ &= \int dz dM_1 dM_2 \nu(M_1, M_2, z) h_s^2 \tau_{\text{GW,obs}} \theta(f_{\text{max}} - f) \\ &= \int dz dM_1 dM_2 \frac{4\pi c^3}{3} \left(\frac{GM_{\text{chirp}}}{c^3}\right)^{\frac{5}{3}} (\pi f)^{-4/3} (1+z)^{-1/3} n_c(M_1, M_2, z) \theta(f_{\text{max}} - f) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Lo strain previsto per lo spettro è  $h_c(f) \approx 10^{-16} (f/1\mu\text{Hz})^{(2/3)}$  per



$f \leq 1\mu\text{Hz}$ . Tale strain è al di sotto del limite misurato da Lommen (2002) con il pulsar timing.

In questo modello si assume che la coalescenza dei Buchi Neri avvenga contemporaneamente al merging delle galassie ospiti: in questo scenario la coalescenza ha la massima efficienza e il valore dell'ampiezza dell'onda ottenuta da questi sistemi può essere considerato come un limite superiore. La figura 4.6a illustra come varia lo spettro in vari intervalli di redshift. Il contributo dominante al background è dovuto a SMBH coalescenti a basso redshift ( $0 \leq z \leq 1$ ).

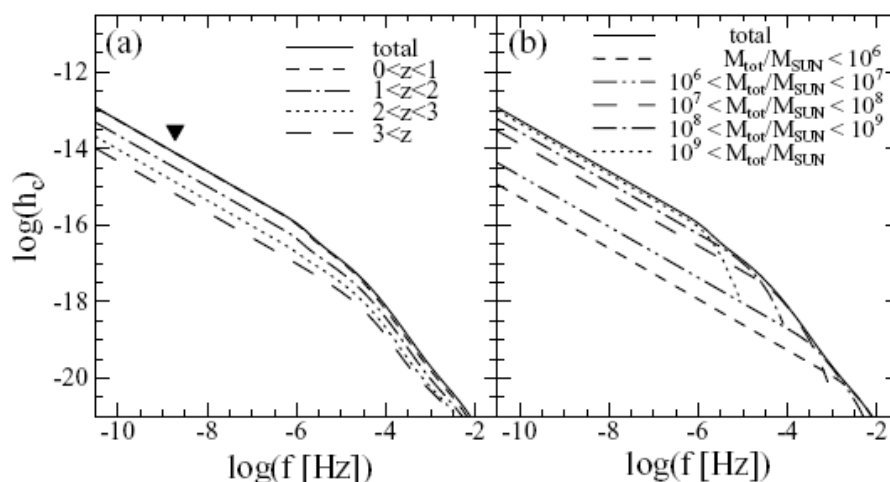


Figura 4.6: Contributi al background da buchi neri binari per diversi intervalli di redshift (a) e per diversi intervalli della massa totale del sistema binario (b).

La figura 4.7 mostra il tasso degli eventi di coalescenza di SMBH per anno dell'osservatore.

Il contributo dominante al background è dovuto alla coalescenza di SMBH binari a basso redshift. Questo risultato è dovuto da un lato, alla minore distanza delle sorgenti a basso redshift che implica una minore diminuzione dell'ampiezza dell'onda rispetto all'ampiezza con cui l'onda stessa è stata emessa. Dall'altro lato, le sorgenti vicine sono anche più vecchie di quelle lontane, quindi hanno accresciuto più materia e sono, conseguentemente più massive.

La fig 4.6b riporta invece gli spettri del background di onde gravitazionali generati da SMBH binari in funzione delle loro masse totali ( $M_{\text{TOT}} = M_1 +$

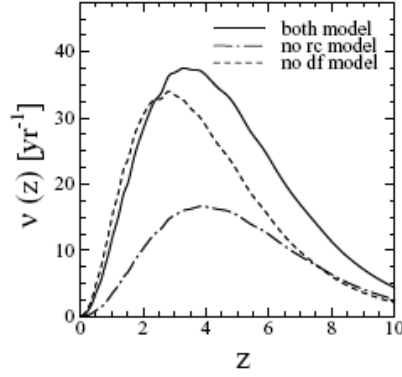


Figura 4.7: Tasso degli eventi di coalescenza di SMBH per anno dell'osservatore.

$M_2$ ). Si vede subito che, a frequenze inferiori di  $10^{-4}$  Hz, il contributo maggiore al background è dovuto a SMBH binari la cui massa totale è minore di  $10^8 M_\odot$ .

#### 4.9 Calcolo delle ampiezze della onda gravitazionale che ci si attende da varie sorgenti

Nei paragrafi precedenti sono state presentate alcuni oggetti che ospitano sistemi binari di buchi neri supermassivi tali da emettere onde gravitazionali rivelabili. Per tali oggetti sono state anche calcolate le ampiezze previste per le onde gravitazionali da loro emesse.

Nel caso di 3C345, sorgente posta ad un redshift  $z = 0.595$  corrispondente ad una distanza (equazione 4.30)  $D(z) = 2.15\text{Gpc}$ , le onde gravitazionali sono osservate ad una frequenza  $f = 5.26 \times 10^{-11}$  Hz, mentre l'ampiezza con cui tali onde sono osservate ha il seguente valore (equazione 4.29):

$$h_s(z, f, M_1, M_2) = 3.47 \times 10^{-18} \quad (4.38)$$

Nel caso di MKn 501, sorgente posta ad un redshift  $z = 0.033$  corrispondente ad una distanza  $D(z) = 140\text{Mpc}$ , le onde gravitazionali sono osservate ad una frequenza  $f = 2.60^{-7}$  Hz con un'ampiezza pari a:

$$h_s(z, f, M_1, M_2) = 8.77 \times 10^{-16} \quad (4.39)$$

Il caso della sorgente OJ 287 si è rivelato più complesso, data la mancanza di una stima per la massa del buco nero secondario. L'ampiezza delle onde gravitazionali emesse da questa sorgente ed osservate da un rilevatore sulla terra è stata quindi calcolata come funzione della massa del buco nero secondario. Come già anticipato nel paragrafo relativo a quest'oggetto, è stato considerato l'intervallo  $10^4 M_{\odot} \leq M_2 \leq 10^8 M_{\odot}$ . Sebbene ci siano evidenze osservative della non circolarità di questo sistema binario, i risultati di seguito presentati sono stati ottenuti nel caso di un'orbita circolare. Tale approssimazione consente di ottenere risultati non troppo dissimili dai valori reali.

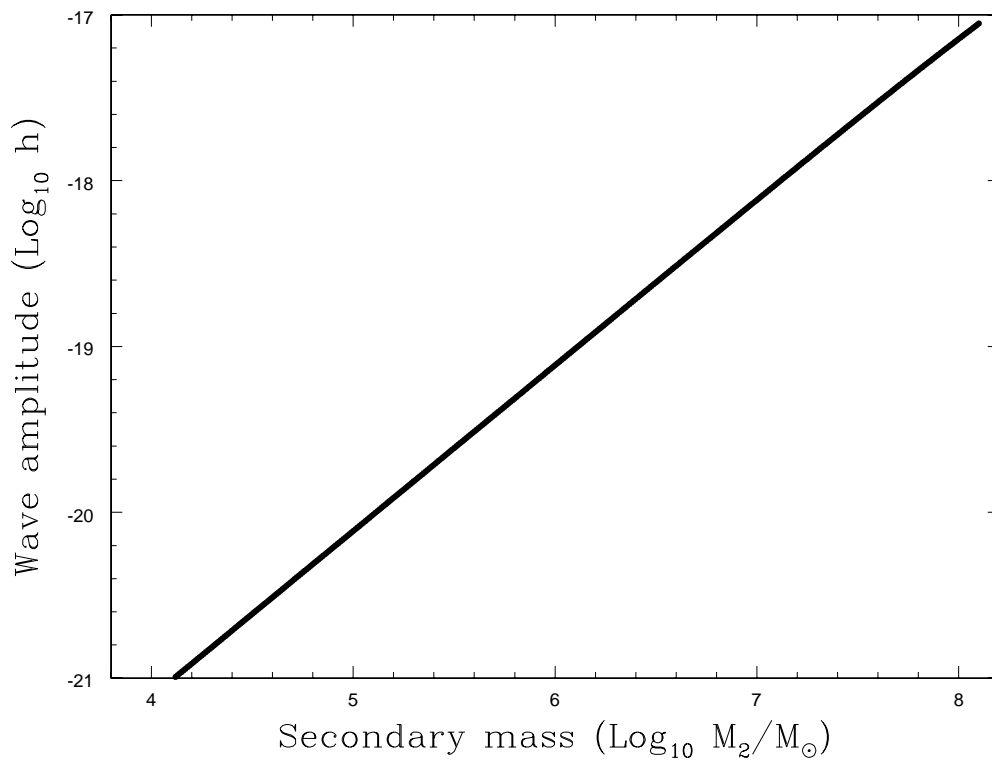


Figura 4.8: Variazione dell'ampiezza dell'onda gravitazionale in funzione del valore della massa del buco nero secondario nell'oggetto OJ 287.

La dipendenza dell'ampiezza dell'onda dalla massa del secondario è molto forte e potrebbe giocare un ruolo determinante nell'eventuale detezione di onde gravitazionali emesse da questa sorgente.

Il caso della pulsar doppia è altrettanto interessante. Data la sua vicinanza alla terra, dell'ordine del kpc, si può pensare che il background di onde gravitazionale contenga un contributo dovuto a sistemi così leggeri ma molto

vicini. Per questo sistema il calcolo dell'ampiezza prevista dell'onda è analogo a quanto fatto nei precedenti casi. Si trova che tale sistema emette onde gravitazionali ad una frequenza  $f = 2.3 \times 10^{-4} \text{Hz}$ , mentre l'ampiezza queste onde per un osservatore sulla terra risulta essere.

$$h_s(z, f, M_1, M_2) = 4.1 \times 10^{-25} \quad (4.40)$$

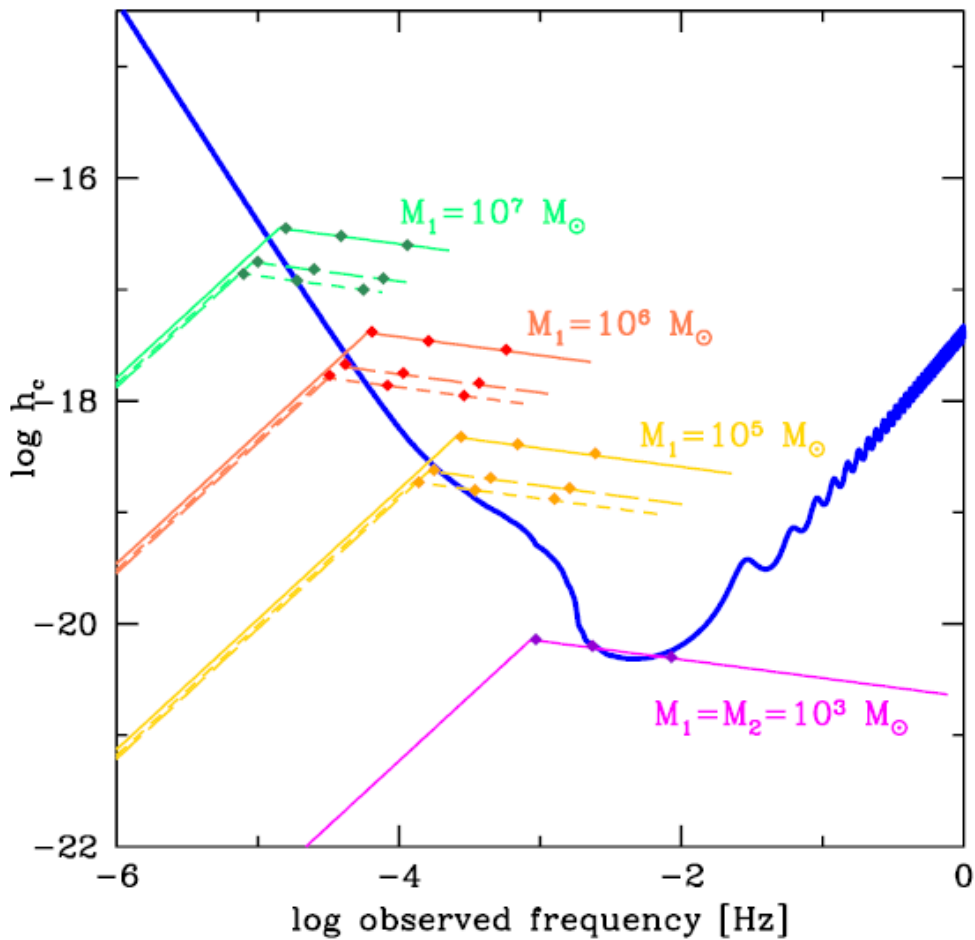


Figura 4.9: Risposta integrata di LISA (linea blu) e confronto con sorgenti binarie di diversa massa (da Sesana et al. 2005).

Il grafico in figura 4.9 riporta la risposta integrata di LISA e la confronta con le ampiezze dei segnali attesi da sistemi binari supermassivi. Le sorgenti supermassive precedentemente discusse emettono onde gravitazionali a frequenze al di fuori della finestra di visibilità di LISA. Fa eccezione il caso della

doppia pulsar PSR J0737-3039A/B, che emette onde gravitazionali all'interno di tale finestra di visibilità. Tale sorgente, però, emette onde di ampiezza troppo piccola per permettere a LISA di osservare questo sistema come sorgente singola.

#### 4.10 Il background stocastico

Il background stocastico di onde gravitazionali è prodotto da un gran numero di sorgenti deboli, non risolte ed indipendenti. Principalmente esso è il risultato di processi che avvennero nei primi istanti di vita dell'universo, ma potrebbe contenere contributi più recenti dovuti a sorgenti di varia natura. Il contributo primordiale si origina all'epoca del disaccoppiamento dell'interazione gravitazionale dalle altre tre interazioni fondamentali, disaccoppiamento che ebbe luogo all'epoca di Plank, cioè quando l'universo aveva un'età di circa  $10^{-22}$  s. Questo segnale costituisce quindi una fotografia dell'universo a tale epoca, il che consentirebbe di aprire una nuova finestra altrimenti inaccessibile per lo studio della cosmologia primordiale e, equivalentemente, della fisica ad energie molto più alte di quelle accessibili con altri metodi.

Tutti i rilevatori attualmente in esercizio (Virgo, i due LIGO, GEO 600, TAMA 300) o in fase di progettazione/realizzazione (LISA) possono captare questi segnali che provengono da qualsiasi direzione. Ovviamente tutte le sorgenti presenti nell'universo contribuiscono al segnale che entra in un qualsiasi ricevitore, dato che le loro attuali configurazioni li rendono sensibili in tutte le direzioni. Il riconoscimento di sorgenti discrete può avvenire soltanto dall'analisi a banda larga di uno stream continuo di dati in un intervallo temporale dell'ordine dell'anno. Nel caso del background stocastico, invece, la correlazione dei segnali provenienti da due ricevitori simultaneamente operanti permetterebbe di ottenere informazioni anche se il periodo di attività simultanea si riduce a pochi secondi. Inoltre, essendo tale analisi possibile soltanto nell'intervallo comune di frequenza a cui i due ricevitori operano, ciò ridurrebbe drasticamente la quantità di dati da analizzare e permetterebbe di ottenere informazioni in tempi ragionevolmente brevi.

Questo discorso, ovviamente, è possibile farlo anche per i contributi dovuti ai nuclei galattici attivi. Per valutare questo contributo, si utilizza l'equazione

3.57 in cui, la dipendenza direzionale è stata sostituita dalla modulo quadro delle funzioni 3.59:

$$\begin{aligned}\langle F^+ \rangle &= \left( \int_0^{4\pi} \|F^+(\Omega)\|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{13\pi}{5}} \\ \langle F^\times \rangle &= \left( \int_0^{4\pi} \|F^\times(\Omega)\|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}\quad (4.41)$$

L'equazione 3.57 diventa:

$$s(t) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{13\pi}{5}} h^+(t-z) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} h^\times(t-z) \quad (4.42)$$

mentre l'equazione 3.58 diventa:

$$\tilde{s}(\omega) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{13\pi}{5}} \tilde{h}^+(\omega) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{h}^\times(\omega) \quad (4.43)$$

A questo punto bisogna sostituire i valori opportuni per  $\tilde{h}^+(\omega)$  e  $\tilde{h}^\times(\omega)$ . Per trovare questi valori ad una determinata frequenza si usa la figura 4.6. Da essa si estraggono, in è possibile estrarre, per varie frequenze, l'ampiezza complessiva del segnale dovuta al background. In particolare, per una frequenza  $f = 10^{-5}$  Hz si estrae il valore  $\hat{h}(\omega) = 10^{-17}$ , per  $f = 10^{-4}$  Hz si ottiene  $\hat{h}(\omega) = 10^{-18}$ , per  $f = 10^{-3}$  Hz si ha  $\hat{h}(\omega) = 3 \times 10^{-20}$  mentre per  $f = 10^{-2}$  Hz si ha  $\hat{h}(\omega) = 10^{-21}$ . Essendo queste frequenze all'interno della banda di visibilit di LISA, il segnale dovuto al fondo sar visibile.

Purtroppo, però, questo segnale non sar identificabile nel senso che nessun interferometro sensibile al fondo stocastico è in grado di distinguere la tipologia delle sorgenti di tale segnale. Questa è la nuova sfida che attende coloro i quali vorranno cimentarsi nell'arduo compito di analizzare gli stream di dati generati dai rivelatori di onde gravitazionali ad interferometri.

# Conclusioni

Il confronto tra le prestazioni dei due interferometri Virgo e LISA mostra che questi due strumenti, oltre che lavorare su diverse bande di frequenza, hanno anche sensibilità differenti. È quindi chiaro che differenti saranno anche le caratteristiche dei segnali rivelati dall'uno o dall'altro strumento.

I segnali che Virgo può rivelare hanno una frequenza compresa tra i 5 Hz e i  $10^4$  Hz, e può rivelare un'onda gravitazionale la cui ampiezza è al più  $10^{-22}$  tra  $10^2$  e i  $10^4$  Hz. LISA invece può rivelare segnali la cui frequenza va da  $10^{-5}$  Hz a  $10^{-1}$  Hz, con un'ampiezza di  $10^{-21}$ .

I segnali provenienti dai sistemi binari di buchi neri all'interno degli oggetti 3C 345 e Mkn 501 non saranno rivelati dai suddetti strumenti perché le frequenze proprie di questi sistemi si trovano al di sotto delle bande di frequenza di entrambi.

Per quanto riguarda l'oggetto OJ 287, il discorso è analogo, dato che la sua frequenza è dell'ordine di  $10^{-9}$  Hz, quindi anche in questo caso l'emissione di onde gravitazionali da quest'oggetto non sarà visibile né da Virgo, né da LISA.

Al contrario, l'emissione di onde gravitazionali da parte del sistema binario composto dalle pulsar PSR J0737-3039A/B (la doppia pulsar) avviene ad una frequenza che si trova all'interno della banda operativa di LISA. Ciò non ostante, l'ampiezza prevista per questo segnale è troppo bassa per permetterne la rivelazione.

È stato anche valutato il segnale che LISA può rivelare rispetto al background stocastico. Quest'ultimo è composto dai segnali provenienti da innumerevoli sorgenti la cui emissione di onde gravitazionali avviene a frequenze comprese tra  $10^{-5}$  e  $10^{-3}$  Hz, cioè più alte rispetto alle sorgenti presentate in dettaglio in questo lavoro. La somma delle loro ampiezze darà il segnale complessivo che entrerà nel rivelatore, che però non sarà in grado di risolvere il

segnale in singole sorgenti. Il problema della risoluzione del segnale in singole sorgenti è tutt'ora oggetto di ricerca, e costituisce un'ardua sfida per coloro che si dedicano a ciò.

La rivelazione di un fondo stocastico di onde gravitazionali generate da AGN darebbe delle notevoli informazioni dal punto di vista dell'Astrofisica in quanto tali onde ci fornirebbero informazioni sull'età oscura dell'Universo che è proprio l'epoca della formazione dei buchi neri super massivi.

In linea di principio inoltre, se da una parte LISA è in grado di rivelare un segnale proveniente da un fondo stocastico di onde gravitazionali proveniente da tantissimi AGN, dall'altra non è però neppure escluso che dei singoli AGN vicini alla coalescenza e più vicini a noi contribuiranno al fondo stocastico, potranno essere rivelati direttamente ed identificati, in quanto in questo caso l'ampiezza dell'onda arriverebbe a superare quella del fondo stocastico.

Si tratterebbe in questo caso di onde gravitazionali osservabili da LISA con elevatissimo rapporto segnale rumore e le previsioni teoriche dicono che LISA dovrebbe osservare alcuni di questi eventi all'anno. Queste osservazioni risulterebbero anche esser un ulteriore strumento per discriminare tra le varie Teorie relativistiche della gravità oggi proposte o per confermare e porre maggiori costrizioni sulla Relatività Generale.

LISA dovrebbe osservare numerosi di questi eventi misurando con precisione i parametri dei buchi neri e consentendo di stimarne la popolazione e l'evoluzione, in tal modo mostrando anche quantitativamente quanto tali buchi neri super massivi possano contribuire alla Materia Oscura dell'Universo.



# Appendice

Vengono qui riportati i codici con cui sono stati eseguiti i calcoli i cui risultati sono esposti nel capitolo 4

#### 4.11 3C 345

```
PROGRAM GW
```

```
IMPLICIT NONE
```

```
DOUBLE PRECISION L,R0,M1,M2,G,C  
DOUBLE PRECISION M,MU,TO,PC,MSUN  
DOUBLE PRECISION A,B,PB,PBY  
DOUBLE PRECISION Z,O_M,O_L,S  
DOUBLE PRECISION D,X,STEP,H0  
DOUBLE PRECISION FP,MCHIRP,AMPL
```

```
C-----  
C   Masses are in units of millions of solar mass  
C   Distances are in pc  
C   Z is the cosmological redshift  
C-----
```

```
M1 = 710  
M2 = 710  
R0 = 0.33  
Z = 0.5928
```

```
C-----  
C   Phisical constants (S.I.)  
C   H0 is in m/s/Mpc  
C-----
```

```
C=2.99792E+8  
G=6.67E-11
```

PC=3.08568025E+16

MSUN = 1.98E+30

O\_M = 0.3

O\_L = 0.7

HO = 70000

M = M1 + M2

MU =M1\*M2/M

PB = ((G\*MSUN\*(M1+M2)\*1.0E+6)/(((R0\*PC)\*\*3)\*4.0\*(3.1415)\*\*2))

PB = PB\*\*(-0.5)

PBY = PB/(31558150.368)

PRINT \*, "PB =", PBY, " years"

C-----  
C     Emitted power (watt)  
C-----

A=(-32.0/5.0)\*((G\*MSUN)\*\*4/C\*\*5)\*MSUN/PC\*\*5

A=A\*(1E+30)

C     PRINT \*,A

L = A\*(MU\*\*2)\*(M\*\*3)/(R0\*\*5)

PRINT \*, "L =",L, " watt"

C-----  
C     Cohalescence time (years)  
C-----

B = (5.0/256.0)\*C\*\*5/((G\*MSUN\*1E+6)\*\*3)\*PC\*\*4

B = B/(365.25637\*24\*3600)

C     PRINT \*,B

```
T0 = B*(R0**4)/(MU*(M**2))
PRINT *, "T0 =", T0, " yrs"
```

```
C-----
C   Distance (Mpc)
C-----
```

```
S=0
X = 0
STEP = 0.000001
```

```
10  S = S + (STEP/ SQRT(O_M*((1+X)**3)+O_L))
```

```
X = X + STEP
```

```
IF (X < Z) THEN
  GOTO 10
END IF
```

```
D = S*C/H0
```

```
PRINT *, "D =", D, " Mpc"
```

```
C-----
C   Wave amplitude
C-----
```

```
FP = (1+Z)/(2*PB)
```

```
PRINT *, "FP =", FP, " Hz"
```

```
MCHIRP = (M1+M2)**(-1.0/3.0)
```

```
MCHIRP = MCHIRP*M1*M2
```

```
MCHIRP = MCHIRP**(0.6)
```

```
PRINT *, "MCHIRP = ", MCHIRP, " millions of solar masses"
```

```
MCHIRP = MCHIRP*4.925
```

```
D = D*(1E+6)*PC/C
```

```
AMPL = 4*SQRT(0.4)*(6.2830*FP)**(2.0/3.0)
```

```
AMPL = AMPL*(MCHIRP)**(5.0/3.0)
```

```
AMPL = AMPL/D
```

```
PRINT *, "Wave amplitude =", AMPL
```

```
END PROGRAM GW
```

## 4.12 Mkn 501

PROGRAM GW

IMPLICIT NONE

DOUBLE PRECISION L,R0,M1,M2,G,C  
DOUBLE PRECISION M,MU,T0,PC,MSUN  
DOUBLE PRECISION A,B,PB,PBY  
DOUBLE PRECISION Z,O\_M,O\_L,S  
DOUBLE PRECISION D,X,STEP,H0  
DOUBLE PRECISION FP,MCHIRP,AMPL

C-----  
C Masses are in units of millions of solar mass  
C Distances are in pc  
C Z is the cosmological redshift  
C-----

M1 = 3  
M2 = 0.6  
c R0 = 0.33  
Z = 0.033  
PB = 23

C-----  
C Physical constants (S.I.)  
C H0 is in m/s/Mpc  
C-----

C=2.99792E+8  
G=6.67E-11  
PC=3.08568025E+16

MSUN = 1.98E+30

O\_M = 0.3

O\_L = 0.7

H0 = 70000

M = M1 + M2

MU = M1\*M2/M

PB = PB\*86400

R0 = M1\*\*(0.25)\*M2\*\*(0.25)\*M\*\*(0.25)

R0 = R0 \* 3.5E+14

Print \*, R0

C-----  
C     Emitted power (watt)  
C-----

A=(-32.0/5.0)\*(G\*MSUN/C)\*\*5/G

C     A=A\*(1E+40)

PRINT \*,A

L = A\*(MU\*\*2)\*(M\*\*3)/(R0\*\*5)

L = L \* (1.0E+20)

L = L \* (1.0E+20)

PRINT \*, "L =",L, " watt"

C-----  
C     Cohalescence time (years)  
C-----

B = (5.0/256.0)\*C\*\*5/((G\*MSUN\*1E+8)\*\*3)

```

      B = B/(365.25637*24*3600)
C     PRINT *,B

      T0 = B*(R0**4)/(MU*(M**2))
      PRINT *,"T0 =",T0," yrs"

C-----
C     Distance (Mpc)
C-----

      S=0
      X = 0
      STEP = 0.000001

10    S = S + (STEP/ SQRT(O_M*((1+X)**3)+O_L))

      X = X + STEP

      IF (X < Z) THEN
          GOTO 10
      END IF

      D = S*C/H0

      PRINT *,"D =",D, " Mpc"

C-----
C     Wave amplitude
C-----

      FP = (1+Z)/(2*PB)

      PRINT *,"FP =",FP," Hz"

```



```
MCHIRP = (M1+M2)**(-1.0/3.0)
MCHIRP = MCHIRP*M1*M2
MCHIRP = MCHIRP**(0.6)

PRINT *,"MCHIRP = ",MCHIRP," 100millions of solar masses"

MCHIRP = MCHIRP*492.5

D = D*(1E+6)*PC/C

AMPL = 4*SQRT(0.4)*(6.2830*FP)**(2.0/3.0)
AMPL = AMPL*(MCHIRP)**(5.0/3.0)
AMPL = AMPL/D

PRINT *,"Wave amplitude =",AMPL

END PROGRAM GW
```

## 4.13 OJ 287

PROGRAM GW

IMPLICIT NONE

DOUBLE PRECISION L,R0,M1,M2,G,C  
DOUBLE PRECISION M,MU,TO,PC,MSUN  
DOUBLE PRECISION A,B,PB,PBY  
DOUBLE PRECISION Z,O\_M,O\_L,S  
DOUBLE PRECISION D,X,STEP,H0  
DOUBLE PRECISION FP,MCHIRP,AMPL  
DOUBLE PRECISION E,F,ESP

INTEGER I

C-----  
C     Masses are in units of solar mass  
C     Orbital period in years  
C     Z is the cosmological redshift  
C-----

      M1 = 4.0e+8  
C     M2 = 1.0E+8  
      PB = 11.866  
      Z = 0.306  
      E = 0.78

C-----  
C     Physical constants (S.I.)  
C     H0 is in m/s/Mpc  
C-----

```

C=2.99792E+8
G=6.67E-11
PC=3.08568025E+16
MSUN = 1.98E+30
O_M = 0.3
O_L = 0.7
HO = 70000

PB = PB*365.25637*24.0*3600.0
PRINT *,PB

F = (1+(73.0/24.0)*(E**2)+(37.0/96.0)*(E**4))
F = F/((1-(E**2))**(3.5))
PRINT *,F

S=0
X = 0
STEP = 0.000001

10  S = S + (STEP/ SQRT(O_M*((1+X)**3)+O_L))

X = X + STEP

IF (X < Z) THEN
    GOTO 10
END IF

D = S*C/HO

A = -(32.0/5.0)*(G**4)*(MSUN**5)/(C**5)
B = (5.0/256.0)*(C**5)/(F*(G*MSUN)**3)

C    PRINT *,"D =",D, " Mpc"

```

```
OPEN (10,FILE="oj.txt",STATUS="UNKNOWN")
```

```
DO ESP = 4.0,8.01,0.01
```

```
M2 = 10**ESP
```

```
M = M1 + M2
```

```
MU =M1*M2/M
```

```
RO = (((PB/6.2830)**2)*G*M*MSUN)**(1.0/3.0)
```

```
PRINT *,RO
```

```
L = (M1+M2)*((M1*M2)**2)*F/(RO**5)
```

```
L = L*A
```

```
PRINT *,L
```

```
TO = (RO**4)/((M1+M2)*M1*M2)
```

```
TO = TO*B
```

```
TO = TO/(365.25637*24.0*3600.0)
```

```
PRINT *,TO
```

```
FP = (1+Z)/(2*PB)
```

```
MCHIRP = (M1+M2)**(-1.0/3.0)
```

```
MCHIRP = MCHIRP*M1*M2
```

```
MCHIRP = MCHIRP**(0.6)
```

```
MCHIRP = MCHIRP*4.925E-6
```

```
C      D = D*(1.0E+6)*PC/C
```

```
AMPL = 4*SQRT(0.4)*(6.2830*FP)**(2.0/3.0)
```

```
AMPL = AMPL*(MCHIRP)**(5.0/3.0)
```

```
AMPL = AMPL/(D*(1.0E+6)*PC/C)
```

```
PRINT *,"Wave amplitude =",AMPL
```

```
L = LOG10(SQRT(L*L))
```

```
TO = LOG10(TO)
```

```
AMPL = LOG10(AMPL)
```

```
WRITE (10,*) M2,ESP,L,TO,AMPL
```

```
END DO
```

```
CLOSE (10)
```

```
END PROGRAM GW
```

# Bibliografia

- Astone, P., Ferrari, V., Maggiore, M., & Romano, J. D. 2000, *International Journal of Modern Physics D*, 9, 361 (e referenze ivi contenute)
- Braccesi, A. 2002, *Dalle stelle all'universo* (Zanichelli editore)
- Buonanno, A. 2002, *Classical and Quantum Gravity*, 19, 1267
- Burgay, M., D'Amico, N., Possenti, A., Manchester, R. N., Lyne, A. G., Joshi, B. C., McLaughlin, M. A., Kramer, M., Sarkissian, J. M., Camilo, F., Kalogera, V., Kim, C., & Lorimer, D. R. 2003, *Nature*, 426, 531
- Capozziello, S. & Corda, C (in stampa)
- Carroll, B. & Ostlie, D. 1996, *An introduction to Modern Astrophysics* (Addison-Wesley Publishing Company)
- Enoki, M., Inoue, K. T., Nagashima, M., & Sugiyama, N. 2004, *ApJ*, 615, 19 (e referenze ivi contenute)
- Giazotto, A., Bonazzola, S., & Gourgoulhon, E. 1997, *Phys. Rev. D*, 55, 2014
- Hulse, R. A. 1994, *Reviews of Modern Physics*, 66, 699 (e referenze ivi contenute)
- Komossa, S. 2003, in *AIP Conf. Proc. 686: The Astrophysics of Gravitational Wave Sources*, ed. J. M. Centrella, 161–174 (e referenze ivi contenute)
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 1975, *Course of Theoretical Physics, Vol. 2, The Classical Theory of Fields*, 4th edn. (Oxford: Pergamon Press)
- Liu, F. K. & Wu, X.-B. 2002, *A&A*, 388, L48 (e referenze ivi contenute)
- Lobanov, A. P. & Roland, J. 2005, *A&A*, 431, 831 (e referenze ivi contenute)

- Lyne, A. G., Burgay, M., Kramer, M., Possenti, A., Manchester, R. N., Camilo, F., McLaughlin, M., Lorimer, D. R., Joshi, B. C., Reynolds, J. E., & Freire, P. C. C. 2004, *Science*, 303, 1153
- Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. 1973, *Gravitation* (San Francisco: W. H. Freeman)
- Rieger, F. M. & Mannheim, K. 2003, *A&A*, 397, 121 (e referenze ivi contenute)
- Taylor, J. H. 1994, *Reviews of Modern Physics*, 66, 711 (e referenze ivi contenute)
- Thorne, K. 1989, Gravitational radiation, in *300 Years of Gravitation* (S.W. Hawking and W. Israel Editors, Cambridge University Press, Cambridge), 330–458
- Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (J.Wiley & Sons, Inc., New York, July 1972.)